



**NOVA**

**IMS**

Information  
Management  
School

# MEGI

---

**Mestrado em Estatística e Gestão de Informação**

Master Program in Statistics and Information Management

## **Levantamentos Programados na Velhice**

Maximização da Utilidade com Retornos Estocásticos

Maria José dos Santos Gonçalves

Dissertação apresentada como requisito parcial para  
obtenção do grau de Mestre em Estatística e Gestão de  
Informação com especialização em Análise e Gestão de Risco

NOVA Information Management School  
Instituto Superior de Estatística e Gestão de Informação

Universidade Nova de Lisboa

**NOVA Information Management School**  
**Instituto Superior de Estatística e Gestão de Informação**  
Universidade Nova de Lisboa

**LEVANTAMENTOS PROGRAMADOS NA VELHICE**  
**MAXIMIZAÇÃO DA UTILIDADE COM RETORNOS ESTOCÁSTICOS**

por

Maria José dos Santos Gonçalves

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Estatística e Gestão de Informação, com especialização em Análise e Gestão de Risco

**Orientador:** Professor Doutor Jorge Miguel Ventura Bravo

Novembro 2018

## **RESUMO**

O objetivo desta tese é identificar a estratégia de levantamentos programados ótima para cada um de vários perfis-tipo de consumidor. Para o efeito, maximiza-se uma função de utilidade do tipo CRRA, desenhada para o segmento da população na velhice, na qual são incorporados retornos de investimento estocásticos e probabilidades de sobrevivência resultantes de um modelo de mortalidade prospetivo. Para melhor se poderem comparar as estratégias de levantamentos programados aqui analisadas, considera-se um prazo fixo, igual à esperança média de vida, não se admitindo a possibilidade de o mesmo poder variar com a longevidade observada e com melhorias na esperança média de vida estimada. É também desconsiderada a existência de rendimentos exógenos. Os resultados mostram que as estratégias que asseguram a sustentabilidade do capital, que incorporam no consumo os retornos dos investimentos e que permitem flexibilidade na escolha de consumos diferenciados para cada período, têm maior potencial de consumo e resultam numa maior utilidade para o cliente. As estratégias de levantamentos programados que obtiveram melhores resultados nesta tese permitem oferecer um produto simples e intuitivo ao cliente, e adaptado às suas necessidades. Em particular, as duas variantes da estratégia de levantamento de uma percentagem sobre o saldo remanescente, introduzidas originalmente nesta tese, permitiram obter melhores resultados para o cliente do que as restantes estratégias analisadas neste estudo.

## **PALAVRAS-CHAVE**

Levantamentos programados; velhice; estratégia de consumo; maximização da utilidade; função de utilidade CRRA; retornos estocásticos

## **ABSTRACT**

The main goal of this thesis is to identify the optimal programmed withdrawal strategy for each consumer profile. For this purpose, we maximize a CRRA utility function, designed for the elder segment of the population, incorporating stochastic investment returns and survival probabilities resulting from a prospective mortality model. For better comparison of the programmed withdrawal strategies analyzed here, we consider a fixed term, equal to the life expectancy, not admitting the possibility of revising it according with observed longevity and with improvements in life expectancy. The existence of exogenous sources of income was also disregarded. The results show that the strategies that assure the sustainability of the capital, that incorporate the investment returns in the withdrawal amount and that allow flexibility in choosing a differentiated amount for each period, have more potential for higher consumption and result in a higher utility for the client. The programmed withdrawal strategies that obtained the best results in this thesis allow a simple and intuitive product for the client, adjusted to her needs. In particular, the two variants of the strategy that consists of consuming a percentage of the remaining capital, introduced originally in this thesis, allowed for better results for the client, when compared to the remaining strategies tested here.

## **KEYWORDS**

Programmed withdrawals; retirement; consumption strategy; utility maximization; CRRA utility function; stochastic returns

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao meu orientador todo o apoio e motivação que me facultou ao longo deste trabalho, e agradeço também ao meu esposo e ao meu pai pela força que me deram, tão indispensável neste caminho.

## ÍNDICE

1. Introdução.....	9
2. Revisão de literatura .....	14
3. Metodologia.....	26
3.1. Modelos .....	26
3.1.1. Modelo de mortalidade .....	26
3.1.2. Modelo de mercado .....	27
3.2. Maximização da utilidade .....	29
4. Resultados e discussão .....	32
4.1. Cenário base .....	32
4.2. Análise de sensibilidade.....	37
5. Conclusões, limitações e recomendações para futuros trabalhos.....	42
6. Referências bibliográficas .....	44
ANEXO I.....	49

## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>FIGURA 1</b> - TRIÂNGULO DAS FINANÇAS NA REFORMA .....	18
<b>FIGURA 2</b> - PARÂMETROS ESTIMADOS E MEDIDAS DE QUALIDADE PARA MODELO ARIMA(0,1,0) COM DADOS DOS EUA DE 1950 A 2015.....	27
<b>FIGURA 3</b> - PARÂMETROS ESTIMADOS PARA O MODELO VASICEK DE DOIS FATORES.....	28
<b>FIGURA 4</b> - CENÁRIO BASE - TESTE 1 - CONSUMO ANO A ANO PARA $y = 8$ .....	35
<b>FIGURA 5</b> - CENÁRIO BASE - TESTE 1 - CONSUMO ANO A ANO PARA $y = 5$ .....	35
<b>FIGURA 6</b> - CENÁRIO BASE - TESTE 1 - CONSUMO ANO A ANO PARA $y = 2$ .....	36
<b>FIGURA 7</b> - ANÁLISE DE SENSIBILIDADE - TESTE 1 - CONSUMO ANO A ANO PARA $y = 8$ .....	40
<b>FIGURA 8</b> - ANÁLISE DE SENSIBILIDADE - TESTE 1 - CONSUMO ANO A ANO PARA $y = 5$ .....	40
<b>FIGURA 9</b> - ANÁLISE DE SENSIBILIDADE - TESTE 1 - CONSUMO ANO A ANO PARA $y = 2$ .....	41
<b>FIGURA 10</b> - CENÁRIO BASE - TESTE 2 - CONSUMO ANO A ANO PARA $y = 8$ .....	50
<b>FIGURA 11</b> - CENÁRIO BASE - TESTE 2 - CONSUMO ANO A ANO PARA $y = 5$ .....	51
<b>FIGURA 12</b> - CENÁRIO BASE - TESTE 2 - CONSUMO ANO A ANO PARA $y = 2$ .....	51
<b>FIGURA 13</b> - ANÁLISE DE SENSIBILIDADE - TESTE 2 - CONSUMO ANO A ANO PARA $y = 8$ .....	53
<b>FIGURA 14</b> - ANÁLISE DE SENSIBILIDADE - TESTE 2 - CONSUMO ANO A ANO PARA $y = 5$ .....	53
<b>FIGURA 15</b> - ANÁLISE DE SENSIBILIDADE - TESTE 2 - CONSUMO ANO A ANO PARA $y = 2$ .....	54
<b>FIGURA 16</b> - TAXA DE MORTALIDADE LOGARÍTMICA POR IDADE.....	54
<b>FIGURA 17</b> - PARÂMETROS ESTIMADOS PARA A DISTRIBUIÇÃO LOG BILINEAR POISSON LEE-CARTER .....	54

## ÍNDICE DE QUADROS

<b>QUADRO 1</b> - FORMAS DE RECEBIMENTO DE PENSÕES E OPÇÕES PRÉ-SELECIONADAS NOS PAÍSES DE JURISDIÇÃO IOPS .....	16
<b>QUADRO 2</b> - RANKING DE ESTRATÉGIAS DE LEVANTAMENTOS PROGRAMADOS POR PERFIL (CENÁRIO BASE).....	32
<b>QUADRO 3</b> - CENÁRIO BASE - TESTE 1 - ESTRATÉGIA 1.....	33
<b>QUADRO 4</b> - CENÁRIO BASE - TESTE 1 - ESTRATÉGIA 2.....	34
<b>QUADRO 5</b> - CENÁRIO BASE - TESTE 1 - ESTRATÉGIA 2.1.....	34
<b>QUADRO 6</b> - CENÁRIO BASE - TESTE 1 - ESTRATÉGIA 2.2.....	35
<b>QUADRO 7</b> - CENÁRIO BASE - TESTE 1 - ESTRATÉGIA 3.....	36
<b>QUADRO 8</b> - RANKING DE ESTRATÉGIAS DE LEVANTAMENTOS PROGRAMADOS POR PERFIL (ANÁLISE DE SENSIBILIDADE).....	37
<b>QUADRO 9</b> - ANÁLISE DE SENSIBILIDADE - TESTE 1 - ESTRATÉGIA 1.....	38
<b>QUADRO 10</b> - ANÁLISE DE SENSIBILIDADE - TESTE 1 - ESTRATÉGIA 2.....	39
<b>QUADRO 11</b> - ANÁLISE DE SENSIBILIDADE - TESTE 1 - ESTRATÉGIA 2.1.....	39
<b>QUADRO 12</b> - ANÁLISE DE SENSIBILIDADE - TESTE 1 - ESTRATÉGIA 2.2.....	40
<b>QUADRO 13</b> - ANÁLISE DE SENSIBILIDADE - TESTE 1 - ESTRATÉGIA 3.....	41
<b>QUADRO 14</b> - CENÁRIO BASE - TESTE 2 - ESTRATÉGIA 1.....	49
<b>QUADRO 15</b> - CENÁRIO BASE - TESTE 2 - ESTRATÉGIA 2.....	49
<b>QUADRO 16</b> - CENÁRIO BASE - TESTE 2 - ESTRATÉGIA 2.1.....	49
<b>QUADRO 17</b> - CENÁRIO BASE - TESTE 2 - ESTRATÉGIA 2.2.....	50
<b>QUADRO 18</b> - CENÁRIO BASE - TESTE 2 - ESTRATÉGIA 3.....	50
<b>QUADRO 19</b> - ANÁLISE DE SENSIBILIDADE - TESTE 2 - ESTRATÉGIA 1.....	51
<b>QUADRO 20</b> - ANÁLISE DE SENSIBILIDADE - TESTE 2 - ESTRATÉGIA 2.....	52
<b>QUADRO 21</b> - ANÁLISE DE SENSIBILIDADE - TESTE 2 - ESTRATÉGIA 2.1.....	52
<b>QUADRO 22</b> - ANÁLISE DE SENSIBILIDADE - TESTE 2 - ESTRATÉGIA 2.2.....	52
<b>QUADRO 23</b> - ANÁLISE DE SENSIBILIDADE - TESTE 2 - ESTRATÉGIA 3.....	53



## 1. INTRODUÇÃO

Um pouco por todo o mundo, existe a crescente preocupação em garantir um rendimento adequado e contínuo durante todo o período de reforma (Staňko & Paklina, 2014). Contudo, durante muito tempo, a atenção do sector financeiro e da comunidade académica esteve quase exclusivamente centrada na fase de acumulação dos sistemas de pensões, e menos na fase de pagamento.

Nos últimos anos assistiu-se a um aumento na procura de soluções individuais e coletivas de acumulação de poupança destinadas a financiar o consumo na velhice. Entre as várias razões apontadas para esta tendência destacamos (Bravo & Holzmann, 2014; Holzmann, 2014):

- (1) As reformas efetuadas nos sistemas de pensões, desde a reforma chilena de 1981, e a transição dos esquemas de benefício definido para esquemas de contribuição definida, que exigiu novos modos de pagamento das pensões;
- (2) A redução do montante das rendas vitalícias estatutárias em resultado das reformas implementadas nos sistemas públicos de pensões em todo o mundo e o incentivo aos esquemas complementares de poupança voluntária;
- (3) A substituição, nos planos de pensões ocupacionais, dos planos de benefício definido por planos de contribuição definida, com o empregador tipicamente envolvido apenas na fase de acumulação, deixando a fase de pagamento à responsabilidade individual dos beneficiários;
- (4) O interesse em complementar a pensão estatutária com uma poupança privada, recebida sob a forma de pensão vitalícia (e.g. na Austrália e na Nova Zelândia, onde as pensões básicas são financiadas por impostos, verificou-se um interesse maior em investir, a título privado, numa futura pensão vitalícia em vez de investir em habitação privada);
- (5) Por último, mas não menos importante, o envelhecimento da população que também atingiu as sociedades mais jovens do Sul e, em particular, da Ásia Oriental, onde tem havido mais abertura para os sistemas de pensões fundeados, muitas vezes sob a forma de *provident funds*, que tradicionalmente não oferecem anuidades. Para além disso, o apoio familiar nestas sociedades tem vindo a decrescer devido à queda nas taxas de fertilidade, à urbanização das sociedades e à migração.

Em Portugal, a grande maioria dos pensionistas tem como única fonte de rendimento periódico, após a reforma, a pensão de velhice paga pelos sistemas públicos de pensões (RGSS - Regime Geral da Segurança Social e CGA - Caixa Geral de Aposentações). Os estudos atuariais recentes sobre a sustentabilidade de longo prazo dos sistemas públicos de proteção social em Portugal demonstram a sua insustentabilidade e assinalam ainda os problemas de equidade e de adequação dos sistemas (Bravo, Afonso, & Guerreiro, 2013, 2014; citado por GEP-MSESS, 2015; Bravo, 2015a, 2015b, 2016, 2017).

As reformas verificadas nos sistemas públicos e privados de pensões têm alterado as fontes de rendimento dos reformados na velhice. Implicam uma redução relativa no rendimento assegurado pelo sistema público, e aumentam a incerteza relativamente aos benefícios proporcionados pelos sistemas privados de pensões. A acrescer a estas mudanças, tem-se verificado uma maior mobilidade da força de trabalho e uma redução do número de filhos por casal, o que tem alterado as tradicionais estruturas familiares, que eram uma importante fonte de apoio intergeracional, impedindo ou reduzindo a capacidade dos elementos mais novos de ajudarem os membros mais velhos da família. A contribuir negativamente estão também as crescentes dificuldades e incertezas no mercado de trabalho e os desafios no acesso à habitação, que levam a que os pais tenham que ajudar os filhos a fazer face às despesas diárias (Bravo & Holzmann, 2014).

Nesse contexto, os indivíduos terão que se tornar mais auto-suficientes e desejarão suplementar as suas fontes de rendimento na reforma, necessitando para tal de ferramentas para gerir de forma eficiente os desafios e riscos (longevidade, inflação, investimento, crédito, liquidez, saúde, dependência, etc.) que se colocam nessa fase da vida.

Existem variadas opções para distribuir a riqueza acumulada pelos anos vindouros. As tradicionais rendas vitalícias (*annuity*), que garantem o pagamento de uma prestação regular enquanto a pessoa segura for viva. Os esquemas de levantamentos programados (*programmed withdrawals*), que permitem o recebimento periódico de uma prestação ao longo da vida remanescente estimada e enquanto existir saldo disponível. A possibilidade de usufruto imediato e sem restrições de todo o capital acumulado (*lump sum payment*) sem qualquer um destes tipos de produto associado. Por último, uma combinação das soluções anteriores.

O livre usufruto do capital acumulado permite ao cliente escolher livremente o montante a consumir ao longo do tempo, e uma vez que mantém a propriedade do capital, deixar a riqueza não consumida aos herdeiros. No entanto, deixa o beneficiário sujeito a riscos demográficos e económicos. Por um lado, o beneficiário não tem capacidade de prever a sua longevidade. Por outro, a gestão do capital pelo próprio está sujeita a riscos de mercado e de crédito, a que se somam outros riscos económicos, como variações nas taxas de inflação e de juro, que podem não ser devidamente acautelados, levando a um possível cenário de consumo total precoce das poupanças acumuladas (Bravo & Holzmann, 2014).

A renda vitalícia, há muito disponível no mercado, permite transferir grande parte dos riscos descritos acima para a entidade comercializadora, o que é benéfico para o cliente, mas o facto de colocar todo o risco do lado da seguradora (longevidade e investimento), faz deste produto uma solução cara para os clientes e dirigida a uma pequena parte da população, em tese a que espera viver para além da esperança média de vida. Adicionalmente, neste tipo de solução, o capital deixa de pertencer à pessoa segura, pelo que, quando perecer, o capital que possa restar é propriedade da seguradora, e não pode ser devolvido aos herdeiros, uma opção que é valorizada por muitas pessoas (Bell, Liu, & Shao, 2017).

O esquema de levantamentos programados torna-se, assim, numa alternativa. A propriedade do capital é mantida pelo beneficiário, ao contrário do que acontece na renda vitalícia. Desta forma, o beneficiário pode definir, à partida, um montante ou porção do capital que quer deixar aos seus herdeiros ou, não o fazendo, sabe que caso não esgote o capital, o remanescente será pago aos mesmos. E apesar de, no esquema de levantamentos programados, o beneficiário assumir o risco de longevidade e de investimento, recebe aconselhamento sobre os montantes a levantar em cada ano, tendo em conta os riscos a que está exposto.

Os esquemas de levantamentos programados são frequentemente baseados em julgamentos subjetivos de *financial advisors*, experiência de mercado e regras heurísticas simples. Os cálculos são geralmente baseados em estimativas da esperança de vida do beneficiário à data da reforma com alguma margem para eventuais desvios. Por exemplo, a hipótese pode ser de uma vida remanescente de 25 anos à idade de reforma para um indivíduo com 65 anos. Uma estratégia de levantamento condizente seria, por exemplo, seguir uma regra de  $1/25$ , o que significa dividir o capital acumulado em partes iguais e pagar anualmente  $1/25$  desse montante ao beneficiário.

Em alternativa à utilização de regras heurísticas simples baseadas em *expert judgement* e na experiência, uma abordagem distinta passa pela modelação explícita do comportamento, dos objetivos e das motivações dos pensionistas beneficiários através de uma função objetiva. Em problemas de otimização ligados à fase de desaccumulação de capital, a abordagem envolve frequentemente uma função utilidade combinando distintos elementos como sejam as preferências do consumidor, a aversão ao risco, a preferência temporal, a importância das heranças na fase terminal da vida, a taxa de juro, entre outras. O valor da função objetivo é determinado por variáveis de decisão ou controlo, sendo que as mais importantes são o nível ou taxa de consumo e a proporção de riqueza investida em ativos de risco, e está sujeito a restrições (e.g., de liquidez). As estratégias de levantamento ótimas devem, em qualquer circunstância, ser autofinanciadas, i.e., baseadas na riqueza inicial do beneficiário.

Milevsky & Huang (2011) utilizam uma função de utilidade simples do tipo CRRA para obter o consumo ótimo para um reformado que maximiza a sua utilidade. Esta maximização apenas considera, no entanto, o consumo total, não observando a utilidade retirada de um motivo de herança.

Habib, Huang, & Milevsky (2017) resolvem o mesmo tipo de problema, mas assumindo retornos estocásticos.

Pfau (2015) sugere comparar a distribuição dos valores da prestação e níveis remanescentes de riqueza para diferentes estratégias, calibrando as prestações iniciais de acordo com a fórmula XYZ, customizada pelo “Conselheiro” (*advisor*) e pelo cliente, em que X corresponde à probabilidade de o consumo cair abaixo de um determinado valor Y (ajustado à inflação) em determinado ano Z da reforma. Ou seja, permitindo ajustar o consumo quando os retornos sejam diferentes do esperado, de forma a garantir a sustentabilidade da riqueza.

Nesta dissertação, o objetivo principal é identificar a estratégia de levantamento ótima para cada perfil de consumidor. Pretende-se que as estratégias de levantamento sejam simples do ponto de vista do cliente e, simultaneamente, que acautelem as principais preocupações e preferências geralmente associadas a este público-alvo.

Neste seguimento, para aferir o consumo ótimo, recorre-se à maximização de uma função de utilidade do tipo CRRA, desenhada especificamente para refletir os principais atributos do segmento populacional em causa.

À semelhança do que tem sido feito, comparam-se várias estratégias para diferentes perfis de risco. Testam-se três estratégias de levantamentos simples e amplamente utilizadas na literatura. Para a estratégia de percentagem fixa sobre o saldo, são introduzidas neste trabalho duas variações, cujo objetivo é contornar a limitação da mesma no que respeita o consumo total de que o beneficiário consegue usufruir.

Utiliza-se ainda uma tabela de mortalidade prospetiva, desenhada com base no modelo Lee-Carter de dois fatores, para as idades em análise neste trabalho, o que diferencia este estudo da maioria dos trabalhos académicos que se debruçam sobre a solução de levantamentos programados, uma vez que usam essencialmente o *hazard rate* (Young, 2004; Milevsky & Robinson, 2005; Bayraktar & Young, 2006; Habib et al., 2017) e as tabelas de mortalidade periódicas (Andréasson, Shevchenko, & Novikov, 2017), com eventual ajuste de segurança baseado em *expert judgement* (Bengen, 1994).

O trabalho começará com uma exposição das formas de pagamento dos benefícios estatutários para a reforma, previstas em vários países do mundo (Staňko & Paklina, 2014). Seguidamente, serão elencadas as principais características e diferenças entre as rendas vitalícias, os pagamentos em *lump sum* e os levantamentos programados, e entrar-se-á em maior detalhe nesta última solução.

Primeiro, será feita uma exposição dos principais riscos associados a esta solução, bem como dos diferentes perfis de risco do público-alvo. Serão apresentadas algumas referências sobre o comportamento dos gastos/rendimentos e variação dos mesmos de acordo com a faixa etária, seguido do elencar das principais regras utilizadas na escolha da prestação a receber.

Ainda no campo das preferências do consumidor, serão apresentadas as duas funções de utilidade mais utilizadas para este segmento.

Seguidamente, será apresentado o modelo de mortalidade, que servirá para estimar as probabilidades de sobrevivência, utilizadas na função de utilidade, bem como a esperança média de vida, utilizada para determinar o número previsto de anos para o usufruto do capital acumulado. O modelo de mercado servirá para estimar os retornos dos investimentos, utilizados para projetar a evolução do capital acumulado.

Por fim, serão testadas diferentes estratégias de levantamento, para diferentes perfis, de forma a apurar o tipo de estratégia que melhor se adequa a cada perfil. Por fim, será realizada

uma análise de sensibilidade para aferir o impacto que poderá ter nesta escolha a variação na taxa de desconto subjetiva.

## 2. REVISÃO DE LITERATURA

Nesta secção, será feita uma apresentação das soluções institucionais para o recebimento de Pensões Estatutárias, nos países membros da IOPS – *International Organisation of Pension Supervisors* (Stańko & Paklina, 2014), como ponto de partida para conhecer as principais soluções de recebimento do capital acumulado até à idade de reforma.

Seguidamente e, uma vez que este trabalho se irá focar na solução de levantamentos programados (*programmed withdrawals*), serão elencados os principais riscos associados a este tipo de produto e abordado o perfil de risco do cliente. Será feito um resumo de alguns dos mais recentes estudos sobre o comportamento do consumo durante o período de reforma e serão também abordadas as principais estratégias utilizadas para definir o valor da prestação periódica. Por último, serão apresentadas as principais funções de utilidade para estudar a satisfação deste segmento da população.

### Esquemas de Recebimento de Pensões

No contexto internacional, existem várias opções para o recebimento da riqueza acumulada ao longo da vida ativa.

Stańko & Paklina (2014) estudaram este tema, debruçando-se sobre os países membros da *International Organisation of Pension Supervisors* (IOPS), e identificaram, para cada um deles, os esquemas disponíveis (Quadro 1).

As principais opções são:

- Recebimento em capital (*lump sum - LS*)
- Renda vitalícia (*life annuity - LA*)
- Levantamentos programados (*programmed withdrawals - PW*)
- Combinação das soluções anteriores.

O recebimento em capital permite o levantamento do capital na sua totalidade. No entanto, não havendo obrigatoriedade de investir este montante num produto de prestações regulares, existe o risco de este se esgotar muito antes do que seria desejável. Por isso, alguns países, apesar de permitirem esta opção, obrigam a que este capital seja investido num produto que permita receber prestações regulares, como uma renda vitalícia ou um produto de levantamentos programados. Há também países que permitem esta opção quando o capital acumulado é baixo devido a uma vida contributiva curta (Colômbia) ou quando não chega para financiar um nível de vida básico (Arménia, Áustria, Bulgária, Costa Rica, República Dominicana e Itália). Outros impõem ainda limites máximos no levantamento em forma de capital, como

um terço ou um quarto da totalidade do capital acumulado (Malta, Maurícias, Portugal, Eslováquia e Índia).

A renda vitalícia consiste no recebimento de uma prestação regular enquanto a pessoa segura for viva. Neste caso, o risco de ruína não existe, uma vez que o recebimento das prestações acordadas está sempre garantido, mesmo que ultrapasse o valor do capital acumulado inicialmente investido. Por outro lado, existe o risco de a pessoa segura perecer relativamente cedo e não usufruir da renda que comprou, sendo o capital remanescente propriedade da seguradora e, por isso, não pago aos herdeiros.

**Quadro 1** - Formas de recebimento de pensões e opções pré-selecionadas nos países de jurisdição IOPS

Jurisdiction	Single mandated product only			Choice possible:					
	LS	PW	LA	LS	PW	LA	Other	Possible to combine?	Default product
Albania (voluntary personal)									
Armenia (mandatory personal)									
Armenia (voluntary personal)									
Australia (mandatory, voluntary, occupational, personal)									
Austria (voluntary occupational)									
Bulgaria (mandatory personal universal funds)									
Bulgaria (mandatory professional funds)									
Bulgaria (voluntary personal funds)									
Chile (mandatory personal)									
Colômbia									
Costa Rica (mandatory occupational)									
Costa Rica (voluntary personal)									
Czech Republic (2 <sup>nd</sup> pillar personal voluntary retirement savings)									
Czech Republic (3 <sup>rd</sup> pillar voluntary supplementary pension savings)									
Czech Republic (supplementary personal voluntary pension insurance, system <u>closed</u> for new participants)									
Dominican Republic (mandatory occupational)									
Hungary (mandatory personal)									
Hungary (voluntary)									
Hong Kong, China (mandatory provident fund)									
Iceland (mandatory occupational)									
Iceland (mandatory personal)									
India (National Pension System, NPS)									
Israel (mandatory personal)									
Italy (voluntary, occupational and personal)									
Jamaica (voluntary occupational)									
Kenya (mandatory occupational)									
Kenya (voluntary occupational)									
Korea (mandatory occupational)									
Luxembourg (voluntary occupational)									
Macedonia (mandatory personal)									
Macedonia (voluntary personal)									
Malta (voluntary occupational)									
Mauritius (mandatory National Savings Fund DC)									
Mauritius (mandatory National Pensions Fund DB)									
Mauritius (voluntary occupational)									
Mexico (voluntary occupational)									
Namibia									
Netherlands (mandatory and voluntary, occupational)									
Nigeria (mandatory occupational)									
Pakistan (voluntary personal)									
Panama (mandatory occupational public sector)									
Peru (mandatory personal)									
Poland (mandatory personal)									
Portugal (voluntary occupational)									
Portugal (voluntary personal - retirement saving schemes)									
Portugal (voluntary personal - individual membership in open pension funds)									
Romania									
Slovak Republic (voluntary personal)									
Slovak Republic (voluntary occupational)									
South Africa (voluntary personal)									
South Africa (voluntary occupational)									
Spain (voluntary, occupational and personal)									
Tanzania (mandatory)									
Thailand (voluntary provident fund)									
Turkey (voluntary, occupational and personal)									
UK (voluntary occupational)									

Fonte: Staříko & Paklina (2014)



Os levantamentos programados consistem no recebimento de uma prestação regular, de valor fixo ou variável, até que o saldo se esgote. Neste caso, existe o risco de ruína, uma vez que a entidade comercializadora apenas garante o pagamento enquanto houver saldo. No entanto, ao contrário da renda vitalícia, a propriedade do capital é mantida pela pessoa segura, pelo que, caso pereça antes de esgotar o saldo, o remanescente será pago ao(s) beneficiário(s) definido(s). Outra característica que diferencia este produto do anterior é o facto de o cliente estar exposto a riscos de mercado (taxa de juro, inflação, risco de crédito, volatilidade), uma vez que a entidade comercializadora não garante a cobertura destes riscos.

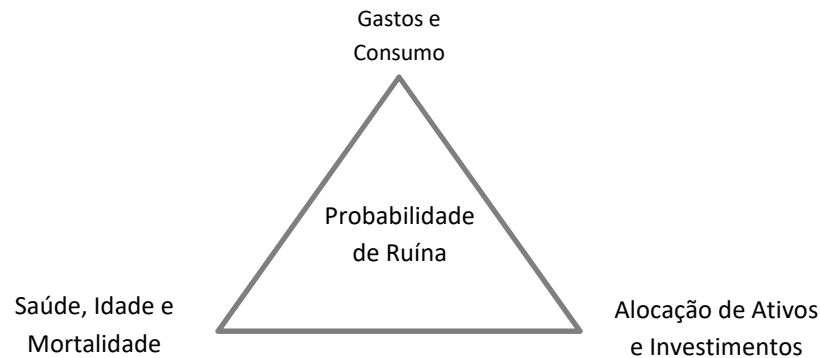
### **Levantamentos Programados – Principais fatores de risco**

Um dos principais riscos associados à solução de levantamentos programados é o risco de ruína, isto é, o risco de viver para além do capital acumulado, e que tem sido amplamente estudado. Parece haver consenso quanto ao otimismo demonstrado pelos conselheiros financeiros, através das recomendações fornecidas aos clientes, em que indicam uma percentagem de consumo que coloca em causa a sustentabilidade do rendimento para o período de usufruto previsível, com base na esperança média de vida. Várias estratégias têm sido estudadas de forma a evitar este risco, como sejam a escolha de pressupostos mais conservadores, ou de resgates variáveis em função da evolução da rentabilidade dos investimentos, da inflação ou da taxa de mortalidade verificada, ou de um conjunto destes fatores.

Bengen (1994) estudou a relação entre a alocação do investimento a diferentes classes de ativos, neste caso ações e obrigações, a taxa de resgate inicial em função do capital investido, e a duração do recebimento de prestações anuais, partindo da percentagem inicialmente definida ajustada à inflação. No final, concluiu que seria aconselhável escolher uma alocação entre os 50 e os 75% em ações, de forma a evitar o consumo total do capital antes do tempo, e que se sentia confortável em recomendar aos seus clientes uma taxa de resgate inicial de 4% sobre o montante investido, e ao valor resultante acrescer da taxa de inflação nos anos seguintes, independentemente do momento em que o cliente tivesse iniciado o recebimento destas prestações.

Milevsky & Robinson (2005) derivaram uma relação analítica entre os três principais fatores na gestão do capital acumulado durante o período de reforma: taxas de consumo, alocação do investimento e mortalidade. Interligaram-nos naquilo a que chamaram de probabilidade de ruína na reforma, onde ruína é definida como viver para além dos recursos disponíveis, representando-os da seguinte forma (Figura 1):

**Figura 1** - Triângulo das Finanças na Reforma



**Fonte:** Milevsky & Robinson (2005)

Introduziram o conceito de valor atual estocástico (*stochastic present value*) para avaliar a sustentabilidade de determinado plano de consumo, para determinada idade e alocação de investimentos em função da riqueza inicial.

Young (2004) determinou a estratégia ótima de investimento para um indivíduo com determinado objetivo de consumo e que pretendesse minimizar a probabilidade de ruína. Definiu, assim, duas possibilidades de consumo em função da riqueza: (i) consumo de um montante constante; (ii) consumo de uma proporção constante. Descobriu que, pelo facto de não restringir o acesso a empréstimos, criava uma situação em que, para um nível de consumo constante e um nível de riqueza próximo de zero, de forma a evitar o risco de ruína, o ótimo seria pedir dinheiro emprestado à taxa de juro sem risco e investir em ativos com risco, para potenciar o retorno e, assim, gerar mais riqueza.

Bayraktar & Young (2006) decidiram adicionar restrições ao modelo atrás referido, de forma a contornar este cenário na presença de baixos níveis de riqueza. Criaram dois cenários: (i) um primeiro em que retiravam por completo o acesso a empréstimos; (ii) um segundo em que o permitiam apenas se a taxa de juro do empréstimo fosse superior à taxa de juro sem risco.

Concluíram que, verificando-se uma função de consumo constante, quando o nível de riqueza se encontra num patamar suficientemente confortável, o ótimo é investir uma parte dessa riqueza em ativos sem risco. Se a riqueza estiver abaixo desse patamar ótimo, a melhor decisão é investir toda a riqueza em ativos com risco. E abaixo de um patamar mais reduzido, e quando se permite o acesso a empréstimos, mesmo que a uma taxa superior à taxa de juro sem risco, o ótimo é contrair empréstimo e investir tudo em ativos com risco.

Concluíram também que, ao contrário do que esperavam, o modelo com uma taxa maior no empréstimo nem sempre convergia para o modelo com a restrição no acesso a empréstimos, conforme esta taxa se aproxima da taxa de retorno esperada dos ativos com risco. Verificaram a convergência apenas quando a força da mortalidade era maior ou igual ao ganho de investir em ativos com risco, ou seja, quando há um menor risco de ruína. Quando a força da mortalidade é inferior ao retorno esperado, o risco de ruína é suficientemente palpável para

levar o indivíduo que está próximo de esgotar a sua riqueza a contrair empréstimos para investir em ativos com risco. Verificaram também que o comportamento do indivíduo que minimiza a probabilidade do risco de ruína é semelhante ao comportamento do indivíduo que maximiza a utilidade do consumo descontada quando:

- A função de utilidade é do tipo CRRA;
- Se verifica a restrição no acesso a empréstimos;
- A taxa de consumo é proporcional à riqueza.

Já Habib *et al.* (2017) observaram que, ao incluir na equação da probabilidade de ruína os rendimentos de pensões vitalícias exógenas, a decisão lógica seria esgotar o saldo da poupança acumulada investida, uma vez que o rendimento exógeno continuaria a existir.

### **Perfil de risco**

Em matéria de consumo, há estudos em que se pretende estabelecer uma ligação entre o perfil de risco e o consumo ótimo. Ao invés de definir esta percentagem apenas em função das rentabilidades dos investimentos e esperança média de vida, sugerem ter também em consideração o perfil de risco do cliente.

Milevsky & Huang (2011) defendem que parâmetros como a probabilidade de sobrevivência, ajustada a pensões exógenas e à aversão ao risco de longevidade, deveriam ser considerados numa gestão dinâmica do consumo das poupanças acumuladas, em detrimento de um consumo constante ao longo da vida ou de um consumo ajustado apenas ao retorno dos investimentos.

Estudando o comportamento destes parâmetros e assumindo um retorno dos investimentos determinístico, concluíram que um reformado não reduz o seu consumo na exata proporção do choque no retorno dos investimentos, a não ser que tenha uma aversão ao risco de 1, conhecida como utilidade de Bernoulli. Exemplificaram com o caso em que, apesar de o portfólio sofrer uma quebra inesperada de 30%, o reformado reduz o consumo em apenas 20 pontos percentuais.

Os autores concluíram assim que aconselhar os clientes a definir o consumo com base numa percentagem sobre a poupança acumulada inicial, ajustada à inflação, como é exemplo a regra dos 4% de Bengen (1994), apenas se adequa a um objetivo de suavizar o nível de consumo durante o ciclo de vida, num conjunto limitado e implausível de parâmetros de preferências, não concordando por isso com o conceito de uma taxa universal de consumo ótima ou segura.

Habib *et al.* (2017) estudaram estes mesmos fatores, mas utilizando retornos estocásticos em vez dos determinísticos utilizados por Milevsky & Huang (2011). Concluíram que, quando definiam que os retornos eram determinísticos, conseguiam uma boa aproximação aos valores

dos obtidos por Milevsky & Huang (2011). No entanto, quando definiam retornos estocásticos, o comportamento do consumo em função da aversão ao risco já não se apresentava monótono para diferentes níveis de aversão ao risco.

### **Comportamento dos gastos e rendimentos e segmentação de idades**

Num estudo elaborado por Paulin & Duly (2002), os autores compararam os pré-reformados e os reformados norte-americanos, na perspetiva dos padrões de rendimento e consumo.

No entanto, esta separação revelou-se insuficiente para capturar as diferenças que se afiguravam existir ao longo do período de velhice, a partir da idade da reforma.

Assim, outros estudos utilizaram o intervalo 65-74 e 75+, como Banerjee (2014), Roy & Carson (2015) e Foster (2016). Roy & Carson (2015) recorreram também a coortes quinquenais, dos 65 aos 85 anos, utilizados igualmente por Auster & Maddock (2016) no seu artigo sobre as necessidades dos reformados australianos, em que analisaram também outro coorte, por décadas, dos 65 aos 85 anos. Brancati *et al.* (2015) utilizaram, no seu estudo para a população inglesa, a segmentação de idades por décadas, mas a começar nos 50 anos até aos 80, e de 5 em 5 anos, a começar nos 60 anos até aos 80. Estudaram também os coortes 80+ e 90+.

De acordo com Foster (2016) na sua análise à população norte-americana, o consumo total, que inclui alimentação, casa, roupa, transportes, cuidados de saúde, entretenimento, pensões e segurança social, entre outras categorias de despesa, mostrou uma tendência decrescente, verificando-se uma estabilidade do consumo no intervalo entre os 55-64 e os 65-74 (se diluirmos os valores pelo número de elementos do agregado), e um decréscimo a partir dos 75 anos (-11%). Dentro do total de consumo, verificou-se que as despesas com a casa constituíam a rubrica que representava a maior fatia do orçamento, em média 33%, para todos os escalões etários. Verificou-se também que as despesas com roupa e transportes, bem como contribuições para pensões e para a segurança social (despesas relacionadas com o emprego), decrescem com o aumento da idade da pessoa de referência do agregado. Para além disso, verificaram, em sentido contrário, uma subida nas despesas com cuidados de saúde, tendo aumentado em 39% do intervalo de 55-64 para o de 65-74, e 14% deste último para os 75 e mais anos. Os rendimentos tiveram também uma trajetória descendente, com uma diminuição de 19% dos 55-64 para os 65-74 e de 20% para o escalão de 75 ou mais anos (retirando o efeito dimensão média do agregado).

De acordo com o estudo realizado por Brancati *et al.* (2015), com base nos dados do *Living Costs and Food Survey* e *English Longitudinal Study of Ageing*, a partir dos 75 anos de idade, verifica-se um declínio continuado no consumo. Verifica-se uma poupança continuada em idades mais avançadas, o que indica que poderia ter havido mais rendimento disponível para consumo nos anos iniciais da reforma, e menor nos anos mais avançados, em que o consumo de bens não essenciais parece decair, de acordo com estes estudos. Segundo este estudo, a maior parte do decréscimo no consumo durante a reforma verifica-se por via do

decrecimento no consumo de bens não essenciais, com o consumo de bens essenciais a manter-se relativamente constante. Apesar de, em geral, os reformados estarem satisfeitos com o nível de consumo, uma parte diz que gostaria de consumir mais, o que poderá indicar que problemas de saúde possam estar a impedi-lo, embora preocupações financeiras também possam contribuir para esta preocupação.

No estudo realizado por Roy & Carson (2015), com base nos dados dos clientes norte-americanos do Chase Bank, analisados num momento único, verificou-se um declínio continuado no consumo depois dos 45 anos em todas as categorias exceto nos cuidados de saúde e nas contribuições para instituições de caridade e presentes.

Já no estudo elaborado por Banerjee (2014) considerando reformados norte-americanos, com base num estudo longitudinal dos dados do *Health and Retirement Study* (HRS) e do *Consumption and Activities Mail Survey* (CAMS), as despesas de habitação e outras despesas relacionadas com esta representaram a maior fatia do orçamento em todos os escalões etários (65-74 e 75+). As despesas com saúde crescem de forma continuada com a idade, e passam a representar a segunda maior fatia do orçamento a partir dos 75 anos, em termos relativos, enquanto os gastos com comida e roupa não sofrem oscilações relevantes. Já os gastos em transportes e lazer mostram uma tendência decrescente.

Auster & Maddock (2016) verificaram que o consumo (ajustado à inflação) não decresceu com a idade, para a base de dados analisada (HILDA - *Household Income and Labour Dynamics in Australia*). Verificaram antes que se manteve estável até aos 74 anos e, a partir daí, apresentou um ligeiro aumento. O consumo considerado não incluiu despesas de lazer nem com assistência à terceira idade.

Existe, assim, evidência de que, em geral, o consumo cai de forma continuada na velhice, sendo este fenómeno especialmente evidente a partir dos 75 anos de idade. As despesas relacionadas com emprego (transportes, roupa, contribuições para pensões e segurança social) e lazer tendem a decrescer e as despesas com saúde a aumentar com a idade. Em média, as despesas com habitação e relacionadas com a casa representam a maior fatia do orçamento para todas as idades.

Ainda assim, com o aumento da esperança de vida, cresce também a potencial necessidade de cuidados de terceiros, como lares e outros serviços similares, que representariam um encargo elevado, e que poderiam resultar num aumento do consumo em idades mais avançadas (Blanchett, 2014).

### **Levantamentos Programados - Principais regras utilizadas na definição da prestação**

No contexto dos esquemas de levantamentos programados, Pfau (2015) identifica as principais técnicas utilizadas para definir o valor da prestação a receber, de acordo com métodos de regras de decisão e métodos atuariais:

- Montante constante, que pode ser ajustado à inflação (Bengen, 1994);
- Percentagem fixa do saldo remanescente (Bengen, 2001);
- Montante variável, evitando cortes acentuados na prestação e reduções para níveis desconfortáveis, com um mínimo e um máximo (Bengen, 2001);
- Regras de decisão de Guyton & Klinger (2006) – regras da preservação do capital e da prosperidade, que permitem salvaguardar o cliente do efeito nocivo de choques no mercado de capitais;
- Percentagem ajustada a um target, de Zolt (2013);
- Regras de levantamento RMD – Distribuição Mínima Requerida (Sun & Webb, 2012) – tipo de estratégias simples como levantamentos baseados no retorno dos investimentos, na esperança média de vida ou na regra dos 4% da riqueza inicial;
- Fórmula de PMT (Steiner, 2014; Waring & Siegel, 2015), que permite obter o valor de uma prestação regular a receber, assumindo uma taxa de retorno fixa e um determinado montante inicialmente investido;
- Fórmulas de PMT Monte Carlo (Frank, Mitchell, & Blanchett, 2011, 2012a, 2012b; Blanchett *et al.*, 2012; Blanchett, 2013) – fórmula que permite definir a alocação dos ativos, o retorno esperado dos investimentos, o nível de encargos do portfólio, a esperança média de vida remanescente e a probabilidade de sucesso desejada, para obter a taxa de consumo customizada, permitindo assegurar que não se esgota o capital antes do tempo mas sim apenas no momento final, não ocorrendo desperdício de capacidade de consumo;
- Adquirir uma renda vitalícia, para cobrir as necessidades de consumo mais essenciais, e investir o remanescente (Pfau, 2015).

Em alternativa ao uso do conceito de risco de ruína, Pfau (2015) sugere comparar a distribuição dos valores da prestação e níveis remanescentes de riqueza para diferentes estratégias, calibrando as prestações iniciais de acordo com a fórmula XYZ, customizada pelo “Conselheiro” (*advisor*) e pelo cliente, em que X corresponde à probabilidade de o consumo cair abaixo de um determinado valor Y (ajustado à inflação) em determinado ano Z da reforma.

### **Funções de Utilidade**

Várias funções de utilidade têm sido utilizadas para estudar o consumo e investimento ótimos durante a velhice. As mais utilizadas neste tipo de tema são as CRRA – *Constant Relative Risk Aversion* e as HARA – *Hyperbolic Absolute Risk Aversion*. Na primeira, assume-se que o nível relativo de aversão ao risco é constante. Na segunda, assume-se que o perfil de risco pode ser representado por uma função de utilidade do tipo hiperbólica (por exemplo elevada a um expoente).

Os modelos económicos do tipo dinâmico *standard* assumem que um agregado tem uma função de utilidade constante (CRRA), representada pela seguinte fórmula (Jagannathan & Kocherlakota, 1996; Poterba *et al.*, 2006):

$$U(W) = \frac{W^{1-y}}{(1-y)} \quad (1)$$

em que  $y$  é o nível de aversão ao risco e  $W$  denota o valor da riqueza.

Assim, de acordo com esta função, os agregados familiares dividiriam o investimento da sua riqueza entre ativos com e sem risco, de acordo com o seu nível de aversão ao mesmo. Quanto maior o valor de  $y$ , maior a aversão ao risco e, por conseguinte, maior o montante investido em ativos sem risco.

Uma das adaptações desta função foi proposta por Cocco, Gomes, & Maenhout (2005), para que melhor refletisse algumas características da velhice, como a probabilidade de morte e a vontade de deixar uma herança:

$$U_0 = \sum_{t=1}^T \beta^{t-1} \left( \prod_{j=0}^{t-2} p_j \right) \left\{ p_{t-1} \frac{1}{1-y} (C_t)^{1-y} + \phi (1-p_{t-1}) \frac{1}{1-y} (B_t)^{1-y} \right\} \quad (2)$$

em que  $\beta$  representa o fator de preferência temporal,  $C_t$  o nível de consumo no período  $t$ ,  $p_t$  a probabilidade de sobrevivência entre o ano  $t$  e o ano  $t+1$ ,  $j$  a idade do indivíduo,  $y > 0$  o coeficiente de aversão ao risco,  $\phi$  a intensidade (importância) dos legados patrimoniais (do motivo de herança) e  $B_t$  o valor da herança desejada, com  $\phi > 0$  e  $B_t > 0$ .

Esta função de utilidade traduz-se num rácio constante de investimento em ativos de risco durante a vida, uma vez que a aversão ao risco relativa é constante ao longo da vida (Dybvig & Liu, 2010).

Também Bell *et al.* (2017) procuraram desenvolver uma função de utilidade que refletisse as preferências dos pensionistas e que pudessem assumir-se à partida como aplicáveis a qualquer membro de um fundo de pensões, sem qualquer conhecimento prévio do indivíduo, por serem consideradas preferências universais para este segmento. Nesse processo, assumiram as seguintes premissas relativamente às preferências dos beneficiários dos planos de pensões:

- É melhor receber prestações programadas do que a remissão do capital (*lump-sum*)
- Uma prestação de valor mais elevado é preferida a uma prestação de menor valor
- Uma maior variação no valor da prestação é vista como indesejável

- Viver para além das poupanças acumuladas é um resultado não pretendido
- Deixar um montante residual das poupanças é valorizado
- As pessoas são avessas ao risco.

Designaram esta função por *Default Utility Function for Pension Fund Default Members v1* (MDUF v1):

$$U_0 = \mathbb{E}_0 \left[ \sum_{t=0}^T \left\{ {}_t p_x \frac{C_t^{1-y}}{1-y} + {}_{t-1|} q_x \frac{B_t^{1-y}}{1-y} \left( \frac{\phi}{1-\phi} \right)^y \right\} \right] \quad (3)$$

em que  $T$  representa o horizonte temporal,  $C_t$  o consumo no ano  $t$ ,  $B_t$  o nível de riqueza em  $t$  e que corresponde ao montante residual da conta em caso de morte entre  $t-1$  e  $t$ ,  ${}_t p_x$  a probabilidade de sobrevivência até  $x+t$  estando vivo à idade  $x$ ,  ${}_{t-1|} q_x$  a probabilidade de morte entre  $x+t-1$  e  $x+t$  estando vivo à idade de  $x$ ,  $y$  o nível de aversão ao risco e  $\phi$  a importância dos legados patrimoniais e a necessidade de fazer face a despesas imprevistas (força do motivo de montante residual da conta).

O que distingue esta função da anterior é:

- A não inclusão do fator de preferência relativa ao momento do consumo. Este fator reflete a propensão para ajustar o consumo às expectativas sobre o mercado, por exemplo, adiando parte do consumo para um momento futuro, se considerar que os retornos esperados futuros vão ser mais elevados. Os autores concluíram que a pesquisa existente aponta para um valor baixo deste parâmetro, o que indica que o consumidor não é sensível a esta dinâmica. Para além disso, tornaria o modelo mais complexo por implicar uma função de utilidade multi-período (sem propriedade aditiva entre períodos).
- O montante residual da conta. Enquanto o primeiro considera apenas o fator herança como justificação para deixar uma parte dos benefícios por gastar, o segundo considera um conceito mais abrangente, uma reserva que pode servir para situações futuras como cuidados na terceira idade, cuidados de saúde, viagens e família e, para além disso, faz depender este fator do nível de aversão ao risco.

Embora a função CRRA seja muito utilizada, por permitir simplificações nos cálculos, outra função tem sido adotada para estudar as preferências de consumo na velhice: a função de utilidade hiperbólica absoluta (HARA).

A seguinte adaptação deste tipo de função permite definir um consumo mínimo para todos os períodos. Assim, o consumidor poderia fixar um mínimo equivalente ao cabaz de consumo



base adequado à sua idade, e deixar que a restante riqueza fosse distribuída entre consumo e investimento de forma ótima (Ding, 2013b):

$$U_c(C_t) = \sum_{t=x}^T \beta^t \frac{(W_t + P_t - \bar{C})^y}{y} \quad (4)$$

em que  $\beta$  representa a preferência pelo momento do consumo,  $W_t$  a riqueza,  $P_t$  a pensão estatutária,  $\bar{C}$  o consumo mínimo fixado para todos os períodos e  $y$  o coeficiente de aversão ao risco.

Alternativamente, Andréasson, Shevchenko & Novikov (2017) desenharam a função de utilidade do consumo da seguinte forma, definindo um consumo base e um fator de saúde (que varia no tempo):

$$U_c(C_t, G_t, t) = \frac{1}{\psi^{t-t_0} y_d} \left( \frac{C_t - \bar{C}_d}{\zeta_d} \right)^{y_d}, \quad (5)$$

$$d = \begin{cases} C, & \text{if } G_t = 2 \text{ (couple)} \\ S, & \text{if } G_t = 1 \text{ (single)} \end{cases}$$

em que  $y_d \in (-\infty, 0)$  representa a aversão ao risco,  $\bar{C}_d$  o consumo base e  $\zeta_d$  normaliza a utilidade de um casal relativamente a um agregado constituído por uma única pessoa. Os parâmetros  $y_d$ ,  $\bar{C}_d$  e  $\zeta_d$  dependem do estado da família  $G_t$ . O consumo é feito com base no resgate de uma parcela dos ativos líquidos de uma pensão recebida.  $\psi^{t-t_0}$  é utilizado como proxy à evolução do consumo durante a velhice que, segundo o autor, tende a decrescer até determinado nível, independentemente do estado de saúde. O autor defende também que este fator reflete melhor este comportamento, com base em dados empíricos, que as probabilidades de sobrevivência utilizadas por Ding (2013a).

### 3. METODOLOGIA

#### 3.1. MODELOS

Os retornos do investimento e as probabilidades de sobrevivência que se irão incorporar na função de utilidade que se pretende maximizar neste trabalho, serão obtidos, respetivamente, através de um processo estocástico que pretende reproduzir a movimentação das obrigações, por um lado, e das ações, por outro, e de um modelo de mortalidade que permitirá estimar as probabilidades de sobrevivência, bem como a esperança média de vida. Os valores estimados serão obtidos através da parametrização, calibração e estimação dos modelos em R.

##### 3.1.1. Modelo de mortalidade

Para obter uma estimativa das taxas de mortalidade, será utilizado o modelo Lee-Carter (1992) baseado na distribuição de Poisson (Brouhns *et al.*, 2002; Renshaw & Haberman, 2003)

$$D_{xt} \sim \text{Poisson}(E_{xt}\mu_x(t)) \quad (6)$$

$$\mu_x(t) = \exp(\alpha_x + \beta_x k_t) \quad (7)$$

em que  $\mu_x(t)$  representa a força de mortalidade à idade de  $x$  no ano  $t$ ,  $D_{xt}$  o número de mortes à idade de  $x$  no ano  $t$ , do total de pessoas expostas ao risco,  $E_{xt}$ .

$\alpha_x$  representa, para cada idade, a taxa média de mortalidade observada no período amostral (graficamente, a forma da curva da mortalidade),  $\beta_x$  reflete a intensidade da variação da mortalidade para cada idade e  $k_t$  denota a tendência temporal.

Assume-se que a força da mortalidade tem a forma log-bilinear dado que  $\ln \mu_x(t) = \alpha_x + \beta_x k_t$ .

Os parâmetros serão estimados com recurso ao método da máxima verosimilhança aplicado à função logarítmica anterior (Goodman, 1979; Bravo, 2007)

$$L(\alpha, \beta, k) = \sum_{x,t} \{D_{xt}(\alpha_x + \beta_x k_t) - E_{xt} \exp(\alpha_x + \beta_x k_t)\} + \text{constante} \quad (8)$$

Serão utilizados os dados da generalidade da população norte-americana, entre 1950 e 2015, referentes às idades compreendidas entre os 50 e os 90 aos, para calibrar o modelo Lee-Carter, por serem as idades de maior interesse para este estudo. O número de mortes e a exposição ao risco são obtidos do Human Mortality Database (2018).

**Figura 2** - Parâmetros estimados e medidas de qualidade para modelo ARIMA(0,1,0) com dados dos EUA de 1950 a 2015

$\theta$	$s.e.(\theta)$	$\sigma$	$AIC$	$BIC$
-0.4754	0.0790	0.412	129.81	134.16

Fonte: estimativas do autor

Assumindo que os parâmetros  $\alpha_x$  e  $\beta_x$  são constantes ao longo do horizonte de previsão, proceder-se-á a uma estimativa para a tendência temporal  $k_t$ , recorrendo ao modelo standard de série temporal univariada Classic Random Walk com deslocação (RWD) ou ARIMA (0,1,0)

$$k_t = \theta + k_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (9)$$

em que o deslocamento  $\theta$  e a volatilidade  $\sigma$  são estimados a partir dos dados utilizados para calibrar o modelo Lee-Carter.

Para o fecho da tabela de mortalidade, será utilizado o modelo proposto por Denuit & Goderniaux (2005), calibrado com os dados do Human Mortality Database (2018) para as idades compreendidas entre os 70 e os 90 anos. A idade de fecho da tabela será de 125 anos.

### 3.1.2. Modelo de mercado

Neste modelo, a riqueza poderá ser investida em obrigações e ações.

Para estimar o comportamento das taxas de juro  $r_t$ , será utilizado o modelo Vasicek (1977) de dois fatores, que têm como pressupostos um mercado eficiente, onde a informação está disponível, sem custos e para todos os agentes, de forma imediata, em que o tempo é contínuo, e no qual não existem saltos repentinos nos preços. Neste modelo, recorre-se à fórmula de Ornstein-Uhlenbeck para estimar os processos independentes  $x_t$  e  $y_t$ , que representam a taxa de juro de curto prazo e a taxa de juro de longo prazo.

$$r_t = x_t + y_t, \quad r(0) = x_0 + y_0 \quad (10)$$

$$dx_t = \beta_x(\mu_x - x_t)dt + \sigma_x dW_1(t), \quad x(0) = x_0 \quad (11)$$

$$dy_t = \beta_y(\mu_y - y_t)dt + \sigma_y dW_2(t), \quad y(0) = y_0 \quad (12)$$

em que  $(W_1, W_2)$  é um movimento Browniano de duas dimensões, com correlação instantânea  $\rho$ ,

$$dW_1(t) dW_2(t) = \rho \quad (13)$$

sendo  $W$  um processo Wiener, que modeliza um risco de mercado aleatório, num contexto de risco neutro,  $x_0, y_0, \beta_x, \beta_y, \mu_x, \mu_y, \sigma_x$  e  $\sigma_y$  são constantes positivas e  $-1 \leq \rho \leq 1$ .

Para estimar a evolução do preço das ações  $S_t$ , será utilizado o movimento geométrico Browniano, representado pela seguinte equação diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (14)$$

em que  $W_t$  é um processo standard de Wiener, e  $\mu$  e  $\sigma$  são constantes que representam, respetivamente, o deslocamento e a volatilidade do preço da ação.

Aplicando o Lema de Itô, obtém-se a equação que representa o preço da ação, a cada instante  $t$ :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (15)$$

Para calibrar o modelo Vasicek, será utilizada uma série histórica mensal de yields de obrigações norte-americanas com maturidades de 3 meses e 10 anos, de janeiro de 1990 a dezembro de 2017. Para estimar os processos que representam a taxa de juro de curto prazo e a taxa de juro de longo prazo, será utilizado o método da máxima verosimilhança.

**Figura 3** - Parâmetros estimados para o Modelo Vasicek de dois fatores

	$\beta_i$	$\mu_i$	$\sigma_i$	$\rho$
Short rate $x$	0.294646652	0.027112798	0.001923087	0.8833633
Long rate $y$	0.421624072	0.045881310	0.002316924	

**Fonte:** estimativas do autor

Quanto às ações, utilizar-se-á a série histórica do S&P 500, relativa ao mesmo período, ajustando os valores do índice ao pagamento de dividendos e stock splits. Os parâmetros estimados com base nestes dados, aplicando o método de máxima verosimilhança, foram:  $(\mu, \sigma) = (0.08713547, 0.17598019)$ .

Assume-se que todos os ativos são valorados a valor de mercado.

Para obter os valores estimados pelos dois modelos de mercado, serão realizadas 1.000 simulações em R.

### 3.2. MAXIMIZAÇÃO DA UTILIDADE

Neste trabalho, pretende-se fazer uma análise das utilidades para diferentes perfis de aversão ao risco e comparação das mesmas entre diferentes estratégias simples de levantamentos programados.

A função da riqueza será definida pela seguinte equação:

$$W_t = W_{t-1}e^{rp(t-t-1)} - C_t \quad (16)$$

Em que  $rp$  é o retorno dos investimentos no período entre  $t - 1$  e  $t$ , e  $C_t$  o consumo em  $t$ , em que  $W_t > 0$  e  $C_t > 0$ .

A função de utilidade será a proposta por Bell *et al.* (2017), referida anteriormente na equação (3).

Esta função foi desenhada de forma a refletir as preferências que se podem considerar universais para este segmento da população. Considera que todo o período de reforma é importante no que respeita ao usufruto de rendimento. Utilizando uma função côncava, reflete o nível de aversão típico deste segmento, para o qual uma variação negativa no rendimento tem um maior impacto na utilidade do que uma variação positiva da mesma magnitude. Se os retornos dos investimentos e a esperança de vida fossem dados conhecidos à partida, a escolha ótima utilizando esta função seria um consumo suavizado ao longo dos períodos. Também implica uma gestão responsável da riqueza, o que os autores crêem estar em linha com o esperado dos membros de um fundo de pensões. É também uma função muito utilizada na literatura académica e, adicionalmente, simplifica a interpretação e a utilização pela indústria.

O taxa de desconto usada para atualizar as utilidades de cada período  $t$  será uma taxa subjetiva de 2% que, de acordo com Alonso-García & Sherris (2017), está em linha com vários estudos realizados no mesmo âmbito.

Quanto à aversão ao risco, utilizam-se aqui os valores 2, 5 e 8, para baixa, moderada e elevada aversão ao risco, respetivamente (Alonso-García & Sherris, 2017).

Para a força do motivo de herança, que varia entre 0 (ausência) e 1 (plena), foram considerados os valores 0.83 (Lockwood, 2014; Bell *et al.*, 2017), 0.15 (Alonso-García & Sherris, 2017) e 0.5 como valor intermédio.

A esperança de vida foi obtida através do modelo de mortalidade anteriormente documentado, tendo-se estimado, por coorte, para a idade de 66 anos em 2018, o valor de 18,6 anos.

No investimento, foi considerado uma alocação decrescente em ações, com o aumento da idade, começando em 50% no momento inicial e chegando aos 38,75% no 19º ano (valor arredondado da esperança de vida estimada para os 66 anos em 2018), uma vez que não se

considera aqui a existência de pensões estatutárias ou outras fontes de rendimento, e que por isso deverá ser acautelada uma maior segurança do capital.

Para estimativa da inflação, será utilizada a mediana do Personal Consumption Index, da Reserva Federal dos EUA, dados a 21/03/2018.

As estratégias de levantamento programado testadas neste estudo serão as seguintes, partindo de uma riqueza inicial de 250 000€:

1. Valor fixo (definido como percentagem do montante inicial), ajustado à inflação nos anos seguintes (Bengen, 1994; Guyton, 2004; Guyton & Klinger, 2006; Blanchett *et al.*, 2012)
2. Percentagem fixa do saldo (Blanchett *et al.*, 2012)
3.  $1 / \text{Esperança Média de Vida remanescente}$  (Blanchett *et al.*, 2012)

A estratégia 2, embora seja simples e garanta que o capital não se esgota, tem os seguintes inconvenientes:

- Uma percentagem mais elevada resulta em consumos muito díspares entre períodos (elevados nos primeiros anos e baixos nos últimos), penalizando ainda o consumo total devido à perda de potencial de valorização do capital implícita nos consumos elevados nos primeiros anos;
- Uma percentagem mais reduzida resulta em consumos baixos e aquém do potencial de consumo que a riqueza investida permitiria.

Para colmatar estas limitações, serão ainda testadas duas variantes desta estratégia:

- 2.1. Percentagem crescente do saldo, na qual é definida uma percentagem de levantamento para o período 1, e um aumento anual, em pontos percentuais, a aplicar sobre a percentagem de levantamento do ano anterior;
- 2.2. Percentagem do saldo, definida individualmente para cada ano, de forma a maximizar a utilidade global.

Estas variantes adicionam progressivamente mais liberdade na definição de um perfil de percentagens de levantamento. A estratégia 2.1, mantendo-se simples, permite melhorar o potencial de consumo nos últimos períodos sem prejudicar a preservação e potenciação do capital, através de uma percentagem de consumo mais baixa nos primeiros períodos. A estratégia 2.2 pretende mostrar qual seria o perfil ótimo de percentagens de levantamento dando ao consumidor liberdade total para definir à partida as percentagens de levantamento em cada ano.

Serão realizados dois testes para cada estratégia de levantamento e perfil:

1. No primeiro, o consumo e a riqueza mínimos terão que ser positivos, refletindo os pressupostos que estamos a considerar neste estudo: a não existência de rendimentos alternativos e o não acesso a empréstimos;
2. No segundo, a restrição da riqueza mínima será alterada para 25.000€ (ou seja, 10% da riqueza inicial) de forma a testar o impacto, no consumo e utilidade, de definir à partida um valor mínimo para deixar como herança.

## 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 4.1. CENÁRIO BASE

Apresentam-se abaixo, no Quadro 2, os resultados da maximização da utilidade para cada uma das estratégias de levantamento, e para cada um dos três perfis de aversão ao risco ( $\gamma = \{2, 5, 8\}$ ), com força do motivo de herança central ( $\phi = 5$ ). As estratégias foram ordenadas em função do resultado da maximização da utilidade para cada perfil. Os valores apresentados refletem uma taxa de desconto subjetiva de 2% (cenário base). Os resultados do Teste 1, detalhados para cada fator de força do motivo de herança ( $\phi = \{0,15; 0,5; 0,83\}$ ), incluindo o valor atual da utilidade, são apresentados mais abaixo. Os resultados em maior detalhe do Teste 2 poderão ser consultados no Anexo I.

Para todos os perfis de risco e em ambos os testes (com e sem herança definida à partida), a estratégia 2.2 é a estratégia ótima (aquela em que se define uma percentagem de consumo sobre o saldo, diferenciada para cada período). Pode observar-se que é a que permite o maior consumo médio, fator muito valorizado pelos beneficiários (consumir mais é melhor do que consumir menos).

**Quadro 2** - Ranking de Estratégias de Levantamentos Programados por Perfil (Cenário base)

$\gamma = 8, \phi = 0,5$		Teste 1				Teste 2			
Ranking	Estratégia	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média
1	2.2	6 629	18 796	4 938	19 019	6 026	16 140	25 000	86 398
2	3	4 318	15 681	26 506	91 390	4 318	15 681	26 506	91 390
3	2.1	4 166	15 673	27 723	95 074	4 166	15 673	27 723	95 074
4	1	7 837	9 430	2 585	258 212	6 821	8 207	25 000	289 966
5	2	3 076	12 548	49 155	162 041	3 076	12 548	49 155	162 041

$\gamma = 5, \phi = 0,5$		Teste 1				Teste 2			
Ranking	Estratégia	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média
1	2.2	5 885	18 799	3 618	14 248	5 497	15 997	25 000	86 370
2	3	4 318	15 681	26 506	91 390	4 318	15 681	26 506	91 390
3	2.1	3 684	16 373	20 494	71 745	3 888	15 851	25 000	86 312
4	2	2 954	13 407	40 450	135 000	2 954	13 407	40 450	135 000
5	1	7 897	9 502	1 256	256 328	6 821	8 207	25 000	289 966



$\gamma = 2, \phi = 0,5$		Teste 1				Teste 2			
Ranking	Estratégia	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média
1	2.2	5 279	18 949	849	6 301	5 174	15 876	25 000	86 254
2	2.1	2 796	17 252	11 222	41 007	3 737	15 735	25 000	86 280
3	3	4 318	15 681	26 506	91 390	4 318	15 681	26 506	91 390
4	2	2 489	14 813	25 175	86 624	2 489	14 813	25 175	86 624
5	1	7 951	9 567	65	254 642	6 821	8 207	25 000	289 966

Fonte: Cálculos do autor

Pode observar-se que a estratégia 1 é a menos preferida pelos consumidores (segunda menos favorita no caso dos consumidores mais avessos ao risco). No Quadro 3, observa-se que, apesar de o consumo mínimo não ser muito baixo (o que é valorizado), o risco de ruína é de tal forma penalizador, que faz com que o cliente prefira consumir pouco para minimizar a probabilidade de esgotar o saldo, perdendo a possibilidade de consumir mais, quando se verifiquem maiores retornos, já que o valor definido inicialmente não incorpora os retornos dos investimentos. Daqui consegue concluir-se que, em geral, estratégias que não incorporem os retornos obtidos pelo investimento, são menos favoráveis, pois desperdiçam a oportunidade de maiores consumos, sem pôr em causa a sustentabilidade da poupança constituída.

**Quadro 3** - Cenário base - Teste 1 - Estratégia 1

Estratégia 1		Teste 1					
$\gamma$	$\phi$	Ct (%)	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média	Utilidade
8	0,83	2,96%	7 412	8 919	11 954	271 485	-7,541E-28
	0,50	3,13%	7 837	9 430	2 585	258 212	-4,825E-28
	0,15	3,17%	7 933	9 545	462	255 204	-4,376E-28
5	0,83	3,07%	7 683	9 244	5 982	263 023	-6,203E-16
	0,50	3,16%	7 897	9 502	1 256	256 328	-5,396E-16
	0,15	3,18%	7 944	9 558	223	254 865	-5,239E-16
2	0,83	3,18%	7 939	9 553	323	255 007	-1,629E-03
	0,50	3,18%	7 951	9 567	65	254 642	-1,580E-03
	0,15	3,18%	7 953	9 570	12	254 566	-1,578E-03

Fonte: Cálculos do autor

Para acautelar que a valorização dos ativos é incluída no consumo, testaram-se várias estratégias em que o consumo consiste numa percentagem do saldo. Na sua forma mais simples (estratégia 2), o cliente define, no início do contrato, uma percentagem fixa. Conforme resultados apresentados abaixo no Quadro 4, esta estratégia já permite obter uma maior utilidade para os clientes com tolerância ao risco baixa a moderada, verificando-se um consumo médio superior. No entanto, dado que é uma percentagem fixa, o montante a consumir nos períodos iniciais é superior, uma vez que o saldo disponível é maior, e vai decrescendo com tempo, de tal forma que acaba por resultar numa grande variação no montante consumido entre os vários períodos, sendo o consumo mínimo bastante inferior ao do cenário anterior, o que é penalizador para o cliente.

**Quadro 4 - Cenário base - Teste 1 - Estratégia 2**

Estratégia 2		Teste 1					
$\gamma$	$\phi$	Ct (%)	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média	Utilidade
8	0,83	6,01%	3 076	12 547	49 158	162 052	-9,182E-28
	0,50	6,01%	3 076	12 548	49 155	162 041	-9,181E-28
	0,15	6,01%	3 076	12 548	49 155	162 041	-9,181E-28
5	0,83	6,92%	2 957	13 391	40 611	135 503	-3,624E-16
	0,50	6,94%	2 954	13 407	40 450	135 000	-3,611E-16
	0,15	6,94%	2 954	13 407	40 450	135 000	-3,611E-16
2	0,83	8,60%	2 623	14 524	28 479	97 212	-1,217E-03
	0,50	9,18%	2 489	14 813	25 175	86 624	-1,135E-03
	0,15	9,20%	2 482	14 826	25 021	86 129	-1,131E-03

Fonte: Cálculos do autor

Recorrendo a uma variação desta estratégia, desenhou-se a estratégia 2.1, em que a percentagem definida inicialmente pode ser incrementada por uma percentagem fixa crescente em função do número de anos decorridos. No Quadro 5, observa-se que o consumo mínimo já não foi tão baixo como no cenário anterior, a variabilidade dos consumos foi menos acentuada e o consumo médio aumentou, o que tornou esta estratégia mais atractiva para os clientes.

**Quadro 5 - Cenário base - Teste 1 - Estratégia 2.1**

Estratégia 2.1		Teste 1				
$\gamma$	$\phi$	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média	Utilidade
8	0,83	4 186	15 594	28 392	97 210	-1,078E-28
	0,50	4 166	15 673	27 723	95 074	-1,062E-28
	0,15	4 166	15 673	27 723	95 075	-1,062E-28
5	0,83	3 801	16 111	22 779	79 157	-1,402E-16
	0,50	3 684	16 373	20 494	71 745	-1,328E-16
	0,15	3 684	16 373	20 493	71 741	-1,328E-16
2	0,83	3 278	16 787	15 932	56 762	-1,064E-03
	0,50	2 796	17 252	11 222	41 007	-9,559E-04
	0,15	2 767	17 274	10 982	40 196	-9,507E-04

Fonte: Cálculos do autor

No entanto, seria ainda possível aumentar o consumo médio e a utilidade flexibilizando ainda mais a percentagem de levantamento? Para comprovar, testou-se uma variação alternativa da segunda estratégia, a 2.2, em que a percentagem de levantamento é definida anualmente (Quadro 6). Esta estratégia mostrou resultados mais positivos para o cliente uma vez que permitiu definir livremente a melhor percentagem de consumo para cada período, tendo resultado num maior consumo médio. Este é o cenário em que o cliente retira maior utilidade, qualquer que seja o seu perfil. É, no entanto, uma estratégia de levantamentos complexa, que pode ser mais difícil de implementar em cenários reais, e mais difícil de entender do ponto de vista do cliente (as percentagens de levantamento, diferentes todos os anos, mas sem uma lógica definida à partida, podem parecer-lhe arbitrárias).

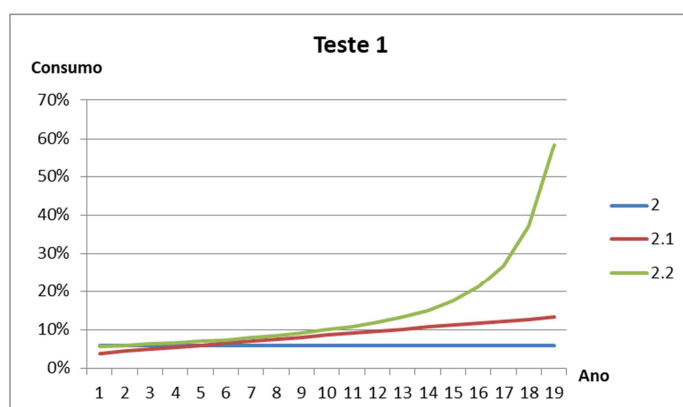
**Quadro 6 - Cenário base - Teste 1 - Estratégia 2.2**

Estratégia 2.2		Teste 1				
$\gamma$	$\phi$	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média	Utilidade
8	0,83	6 193	16 562	21 720	75 804	-4,843E-29
	0,50	6 629	18 796	4 938	19 019	-1,915E-29
	0,15	6 579	19 260	806	7 315	-1,613E-29
5	0,83	5 934	17 026	17 027	60 420	-1,030E-16
	0,50	5 885	18 799	3 618	14 248	-6,322E-17
	0,15	5 707	19 117	421	5 977	-5,825E-17
2	0,83	6 311	18 156	8 368	31 058	-1,005E-03
	0,50	5 279	18 949	849	6 301	-8,527E-04
	0,15	4 723	18 982	23	4 514	-8,376E-04

Fonte: Cálculos do autor

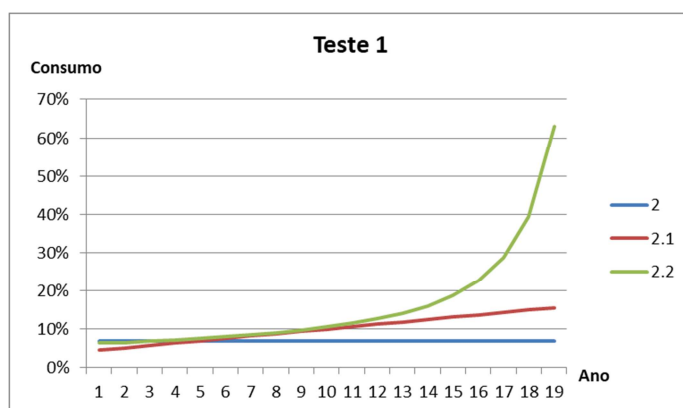
Abaixo apresentam-se os gráficos que comparam as percentagens de consumo, ano a ano, das estratégias 2, 2.1 e 2.2, para o teste 1 e por perfil de aversão ao risco, com um fator de força de motivo de herança central ( $\phi = 5$ ).

**Figura 4 - Cenário base - Teste 1 - Consumo ano a ano para  $\gamma = 8$**



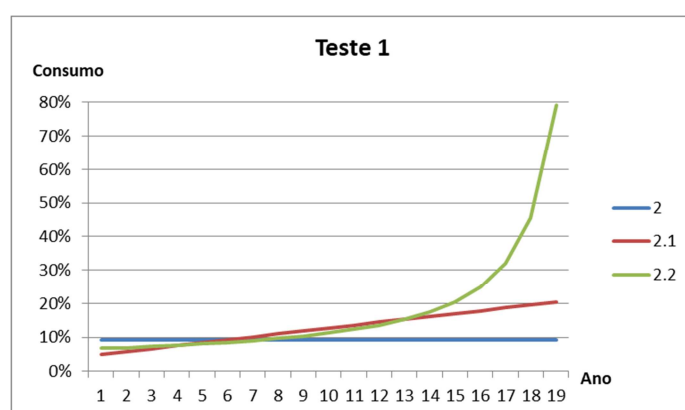
Fonte: Cálculos do autor

**Figura 5 - Cenário base - Teste 1 - Consumo ano a ano para  $\gamma = 5$**



Fonte: Cálculos do autor

**Figura 6** - Cenário base - Teste 1 - Consumo ano a ano para  $\gamma = 2$



Fonte: Cálculos do autor

Finalmente, todos os cenários anteriores, apesar de minimizarem o risco de ruína (exceto o cenário 1 em que existe maior risco, mas que pode ser minimizado com um consumo mais baixo), não acautelam alterações na esperança de vida, o que pode ter impacto no consumo ótimo. Por isso, foi testada uma estratégia final (3) em que o consumo resulta do saldo a dividir pela esperança de vida projetada para cada idade e cada ano cronológico (Quadro 7). Este cenário tem a vantagem de incorporar no cálculo do consumo os retornos dos investimentos e, ainda, possíveis alterações na esperança de vida (que as restantes estratégias não consideram), ajustando continuamente o consumo a este fator. É uma estratégia de levantamentos interessante, na medida em que a utilidade para o cliente apenas é suplantada pela estratégia 2.2 (e também pela 2.1, para os clientes menos avessos ao risco), mas mais intuitiva do ponto de vista do cliente, tendo ainda a vantagem já referida de reduzir o impacto negativo de alterações na esperança de vida.

**Quadro 7** - Cenário base - Teste 1 - Estratégia 3

Estratégia 3		Teste 1				
$\gamma$	$\phi$	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média	Utilidade
8	0,83	4 318	15 681	26 506	91 390	-8,048E-29
	0,50	4 318	15 681	26 506	91 390	-7,825E-29
	0,15	4 318	15 681	26 506	91 390	-7,825E-29
5	0,83	4 318	15 681	26 506	91 390	-1,274E-16
	0,50	4 318	15 681	26 506	91 390	-1,238E-16
	0,15	4 318	15 681	26 506	91 390	-1,238E-16
2	0,83	4 318	15 681	26 506	91 390	-1,086E-03
	0,50	4 318	15 681	26 506	91 390	-1,014E-03
	0,15	4 318	15 681	26 506	91 390	-1,011E-03

Fonte: Cálculos do autor

As mesmas estratégias de levantamento foram testadas para diferentes forças do motivo de herança ( $\phi = \{0,15; 0,83\}$ ), tendo-se verificado que o ranking de estratégias de levantamento preferidas mantém-se inalterado, com exceção apenas para o perfil de risco  $\gamma = 2$  e  $\phi = 0,83$

(aversão ao risco baixa e força do motivo de herança elevada), no Teste 2, caso em que a segunda estratégia preferida é a 3, em vez da 2.1.

Verifica-se, conforme esperado, que o consumo cresce com o decréscimo do fator de aversão ao risco, e o mesmo é válido para o decréscimo do fator do motivo de herança.

As conclusões referidas acima mantêm-se nos casos em que o cliente decide, à partida, que quer deixar uma herança de, pelo menos, 10% do montante inicial (Teste 2), com exceção do caso referido acima relativo ao perfil de aversão ao risco baixa e fator de motivo de herança alto.

## 4.2. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Abaixo, no Quadro 8, apresentam-se os resultados da análise de sensibilidade, cujo propósito foi verificar o impacto, na escolha da estratégia ótima para cada perfil, de uma subida na taxa subjetiva de desconto de 2 para 3%.

Pode observar-se que, face ao cenário base, o ranking apenas se altera no Teste 2 do perfil mais avesso ao risco ( $\gamma = 8$ ). No referido teste, a pior opção passa a ser a estratégia 1 em vez da 2.

No Teste 1, verifica-se uma ligeira diminuição da riqueza final média e mínima.

**Quadro 8** - Ranking de Estratégias de Levantamentos Programados por Perfil (Análise de sensibilidade)

$\gamma = 8, \phi = 0,5$		Teste 1					Teste 2			
Ranking	Estratégia	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média	Estratégia	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média
1	2.2	6 549	18 778	4 878	18 804	2.2	5 957	16 119	25 000	86 393
2	3	4 318	15 681	26 506	91 390	3	4 318	15 681	26 506	91 390
3	2.1	4 135	15 692	27 423	94 111	2.1	4 135	15 692	27 423	94 111
4	1	7 839	9 432	2 543	258 152	2	3 074	12 576	48 876	161 180
5	2	3 074	12 576	48 876	161 180	1	6 821	8 207	25 000	289 966

$\gamma = 5, \phi = 0,5$		Teste 1					Teste 2			
Ranking	Estratégia	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média	Estratégia	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média
1	2.2	5 771	18 769	3 547	13 989	2.2	5 393	15 963	25 000	86 361
2	3	4 318	15 681	26 506	91 390	3	4 318	15 681	26 506	91 390
3	2.1	3 633	16 391	20 106	70 476	2.1	3 853	15 825	25 000	86 305
4	2	2 943	13 461	39 892	133 255	2	2 943	13 461	39 892	133 255
5	1	7 898	9 504	1 226	256 286	1	6 821	8 207	25 000	289 966

$\gamma = 2, \phi = 0,5$		Teste 1					Teste 2			
Ranking	Estratégia	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média	Estratégia	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média
1	2.2	5 015	18 859	808	6 008	2.2	4 913	15 791	25 000	86 238
2	2.1	2 687	17 245	10 679	39 153	2.1	3 650	15 669	25 000	86 262
3	3	4 318	15 681	26 506	91 390	3	4 318	15 681	26 506	91 390
4	2	2 443	14 901	24 141	83 297	2	2 481	14 828	25 000	86 062
5	1	7 954	9 570	1	254 551	1	6 821	8 207	25 000	289 966

Fonte: Cálculos do autor

No Teste 1 da estratégia 1 (Quadro 9), observa-se uma subida muito ligeira no consumo, face ao cenário base, para os perfis mais avessos ao risco e com maior fator de motivo de herança, já que estes são os perfis onde existe margem para um aumento do consumo. Em todos os perfis se verifica um decréscimo na riqueza final mínima, o que é uma consequência natural da subida verificada no consumo médio.

**Quadro 9** - Análise de sensibilidade - Teste 1 - Estratégia 1

Estratégia 1		Teste 1					
$\gamma$	$\phi$	Ct (%)	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média	Utilidade
8	0,83	2,97%	7 421	8 929	11 769	271 222	-7,062E-28
	0,50	3,14%	7 839	9 432	2 543	258 152	-4,551E-28
	0,15	3,17%	7 933	9 546	454	255 193	-4,134E-28
5	0,83	3,08%	7 689	9 252	5 842	262 826	-5,762E-16
	0,50	3,16%	7 898	9 504	1 226	256 286	-5,030E-16
	0,15	3,18%	7 944	9 559	218	254 858	-4,887E-16
2	0,83	3,18%	7 940	9 554	306	254 983	-1,494E-03
	0,50	3,18%	7 954	9 570	1	254 551	-1,482E-03
	0,15	3,18%	7 954	9 570	1	254 551	-1,450E-03

Fonte: Cálculos do autor

Na estratégia 2 (Quadro 10), onde a riqueza final é superior, verifica-se uma subida no consumo médio, para todos os perfis, em especial para aqueles com menor aversão ao risco, já que naturalmente tendem a consumir mais e, ao contrário do que se verifica na estratégia anterior, têm aqui margem para aumentar o consumo. Para os perfis { 2; 0,50} e { 2; 0,15} no Teste 2, isto não se verifica de forma assinalável já que a riqueza remanescente está no limite mínimo, neste caso os 25.000€. Este resultado está em linha com o esperado, já que uma taxa de desconto superior reflete uma preferência maior pelo consumo mais imediato, em detrimento de consumo futuro.

**Quadro 10** - Análise de sensibilidade - Teste 1 - Estratégia 2

Estratégia 2		Teste 1					
$\gamma$	$\phi$	Ct (%)	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média	Utilidade
8	0,83	6,03%	3 074	12 575	48 880	161 191	-7,790E-28
	0,50	6,03%	3 074	12 576	48 876	161 180	-7,789E-28
	0,15	6,03%	3 074	12 576	48 876	161 180	-7,789E-28
5	0,83	6,99%	2 947	13 445	40 055	133 766	-3,138E-16
	0,50	7,01%	2 943	13 461	39 892	133 255	-3,127E-16
	0,15	7,01%	2 943	13 461	39 892	133 255	-3,127E-16
2	0,83	8,78%	2 581	14 621	27 386	93 719	-1,091E-03
	0,50	9,37%	2 443	14 901	24 141	83 297	-1,016E-03
	0,15	9,40%	2 436	14 914	23 990	82 809	-1,013E-03

Fonte: Cálculos do autor

Na estratégia 2.1 (Quadro 11), verifica-se a mesma tendência observada na estratégia 2, mas de forma menos pronunciada, já que o consumo é superior nesta estratégia, e a riqueza remanescente inferior. No entanto, no teste 2, verifica-se que, apesar de a percentagem inicial de consumo ser superior, isto não resulta em maior consumo médio total, já que a antecipação do consumo leva a que não se consiga rentabilizar a riqueza investida por um maior período de tempo.

**Quadro 11** - Análise de sensibilidade - Teste 1 - Estratégia 2.1

Estratégia 2.1		Teste 1				
$\gamma$	$\phi$	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média	Utilidade
8	0,83	4 155	15 612	28 097	96 263	-9,531E-29
	0,50	4 135	15 692	27 423	94 111	-9,387E-29
	0,15	4 135	15 692	27 423	94 111	-9,387E-29
5	0,83	3 750	16 130	22 384	77 872	-1,253E-16
	0,50	3 633	16 391	20 106	70 476	-1,187E-16
	0,15	3 633	16 391	20 105	70 472	-1,186E-16
2	0,83	3 164	16 799	15 250	54 487	-9,629E-04
	0,50	2 687	17 245	10 679	39 153	-8,664E-04
	0,15	2 658	17 267	10 447	38 364	-8,618E-04

Fonte: Cálculos do autor

Na estratégia 2.2 (Quadro 12), verifica-se o mesmo comportamento observado na estratégia 2.1, ou seja, uma maior percentagem de consumo inicial, mesmo sacrificando um maior consumo total.

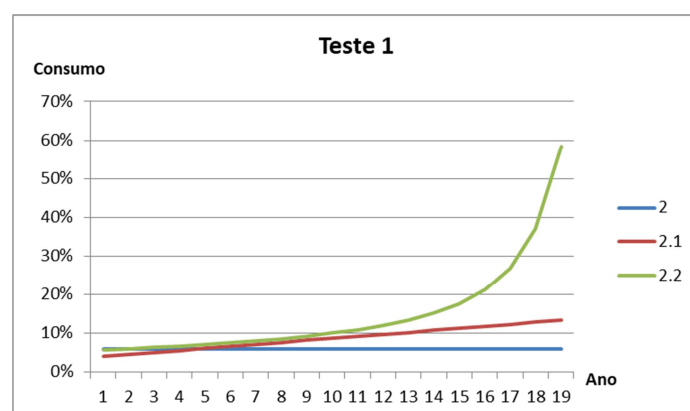
**Quadro 12** - Análise de sensibilidade - Teste 1 - Estratégia 2.2

Estratégia 2.2		Teste 1				
$\gamma$	$\phi$	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média	Utilidade
8	0,83	6 132	16 569	21 497	75 075	-4,348E-29
	0,50	6 549	18 778	4 878	18 804	-1,737E-29
	0,15	6 501	19 238	797	7 234	-1,465E-29
5	0,83	5 003	17 114	16 273	57 793	-9,817E-17
	0,50	5 771	18 769	3 547	13 989	-5,748E-17
	0,15	5 595	19 080	413	5 868	-5,304E-17
2	0,83	6 060	18 109	8 003	29 799	-9,131E-04
	0,50	5 015	18 859	808	6 008	-7,777E-04
	0,15	4 483	18 890	21	4 301	-7,645E-04

Fonte: Cálculos do autor

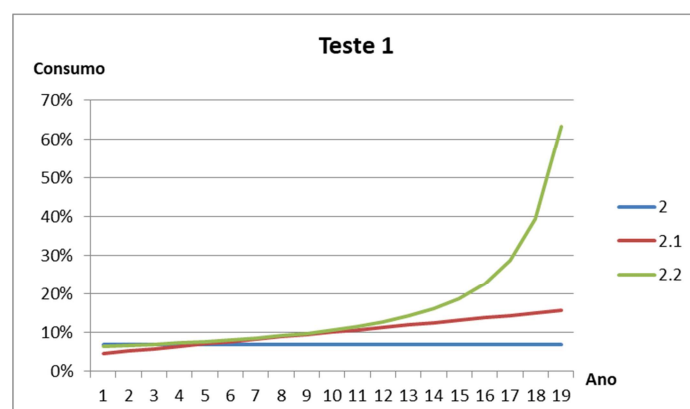
Abaixo apresentam-se os gráficos que comparam as percentagens de consumo, ano a ano, das estratégias 2, 2.1 e 2.2, para o teste 1 e por perfil de aversão ao risco, com um fator de força de motivo de herança central ( $\phi = 5$ ).

**Figura 7** - Análise de sensibilidade - Teste 1 - Consumo ano a ano para  $\gamma = 8$



Fonte: Cálculos do autor

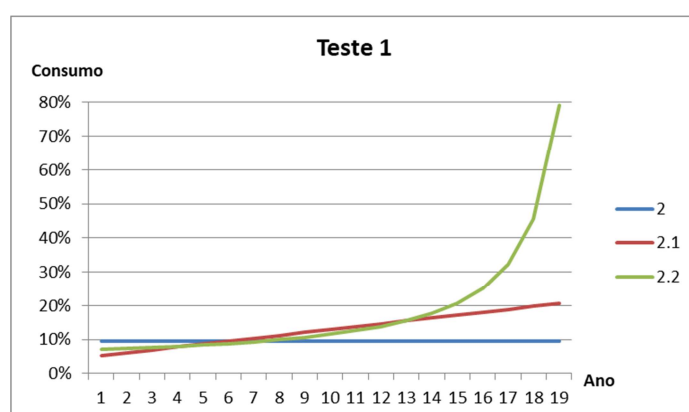
**Figura 8** - Análise de sensibilidade - Teste 1 - Consumo ano a ano para  $\gamma = 5$



Fonte: Cálculos do autor



**Figura 9** - Análise de sensibilidade - Teste 1 - Consumo ano a ano para  $\gamma = 2$



Fonte: Cálculos do autor

Na estratégia 3 (Quadro 13), não se observam alterações no consumo, uma vez que o mesmo não depende do perfil do beneficiário nem da taxa de desconto, e não varia com uma herança de 25.000€, já que a riqueza final mínima não desce abaixo dos 26.000€ no cenário em que não se impõe esta restrição.

**Quadro 13** - Análise de sensibilidade - Teste 1 - Estratégia 3

Estratégia 3		Teste 1				
$\gamma$	$\phi$	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média	Utilidade
8	0,83	4 318	15 681	26 506	91 390	-7,000E-29
	0,50	4 318	15 681	26 506	91 390	-6,814E-29
	0,15	4 318	15 681	26 506	91 390	-6,814E-29
5	0,83	4 318	15 681	26 506	91 390	-1,147E-16
	0,50	4 318	15 681	26 506	91 390	-1,117E-16
	0,15	4 318	15 681	26 506	91 390	-1,117E-16
2	0,83	4 318	15 681	26 506	91 390	-9,891E-04
	0,50	4 318	15 681	26 506	91 390	-9,265E-04
	0,15	4 318	15 681	26 506	91 390	-9,238E-04

Fonte: Cálculos do autor

## 5. CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

Neste trabalho, analisou-se o produto de levantamentos programados, como veículo para gerir a riqueza acumulada durante a velhice. Testaram-se algumas das estratégias de levantamento mais comuns, com a finalidade de as comparar, recorrendo à maximização da utilidade, e de perceber os fatores mais relevantes para cada perfil de cliente, bem como a estratégia que melhor se poderia adaptar a cada um.

Da análise realizada, pode concluir-se que, em geral, estratégias que não se adaptam aos retornos obtidos pelo investimento são em geral menos favoráveis, já que se perde a oportunidade de maiores consumos, sem pôr em causa a sustentabilidade da poupança constituída.

Exemplo disto é estratégia 1, em que se consome uma percentagem sobre o saldo inicial, e se vai ajustando esse valor à inflação nos anos seguintes. Já Pfau (2015) tinha observado que, quando existem retornos moderados a elevados, esta estratégia não retirava proveito do potencial de consumo trazido pelo retorno dos investimentos. Blanchett *et al.* (2012) referira também que esta estratégia era quase sempre a menos eficiente a providenciar a maximização do consumo total durante o período de vida.

Neste estudo, foi possível verificar também que uma maior flexibilidade na escolha de um consumo diferenciado para cada período resulta numa maior utilidade para o cliente. Como consequência disto e do facto de incorporar os retornos do investimento no consumo, a estratégia 2.2 foi a que maximizou a utilidade para todos os perfis de cliente analisados e testes realizados, incluindo na análise de sensibilidade.

Por outro lado, outra estratégia que se destacou foi a estratégia 3. Além de incorporar os retornos dos investimentos no consumo, tem a vantagem de ter em consideração a esperança de vida projetada para cada idade no montante a consumir em cada período, sendo assim uma boa opção para quem procura a sustentabilidade da poupança. Além disso, é simples e intuitiva para o cliente, sendo adequada a um perfil mais passivo, para quem pretenda ter uma menor intervenção na decisão de consumo.

Os comentários anteriormente expostos estão em linha com o já defendido por Milevsky & Huang (2011), que advogaram que um consumo ajustado às probabilidades de sobrevivência era mais adequado do que um consumo constante durante o período de vida. Pfau (2015) também concluiu que uma estratégia ótima de levantamentos programados deveria incorporar a probabilidade de morte, e permitir ajustar o período de consumo à experiência de mortalidade observada para um conjunto de população relevante, e que a percentagem de consumo deveria ser determinada de forma a manter uma determinada probabilidade de ruína.

Por fim, como esperado, o consumo aumenta com a diminuição do fator de aversão ao risco, como também foi observado por Milevsky & Huang (2011), o mesmo se verificando para o fator do motivo de herança, ainda que de forma menos pronunciada.

Os testes realizados assumiram um prazo fixo de 19 anos, resultante da esperança de vida estimada para um indivíduo com 66 anos em 2018. Aqui, não foi incluída uma margem de segurança em relação ao valor obtido pelo modelo de mortalidade, ao contrário da prática habitual do mercado, e o mesmo não foi revisto em função de possíveis melhorias na esperança média de vida, ao longo da vida do contrato, com o intuito de tornar esta análise o mais objetiva possível em relação aos perfis, excluindo o impacto que uma alteração no prazo pudesse ter nos resultados obtidos. Apenas na estratégia 3 foi refletida a melhoria na esperança média de vida, na definição do consumo para cada ano, mantendo-se fixo o prazo do contrato para efeitos de análise e comparação com as outras estratégias.

Em futura investigação, os mesmos testes poderão ser realizados com recurso a um prazo dinâmico, que se vá ajustando a alterações observadas na esperança média de vida, para que se possa ter este fator em consideração nos resultados observados.

Poderá ser utilizado outro modelo de mortalidade e verificar-se que impacto tem nas escolhas ótimas para cada perfil. Da mesma forma, para os retornos no investimento simulados, poderá ser utilizado outro modelo, ou o mesmo mas com dados diferentes, por exemplo, os dados do Global Pension Statistics (OECD, 2017), que abrange 85 países e contém informação sobre montantes, alocações e retorno dos investimentos de fundos de pensões públicos e privados.

Foi aqui utilizada a função de utilidade do tipo CRRA, pelas suas vantagens a nível analítico. No entanto, outras poderão ser estudadas, ou até poderá ser feita uma análise comparativa de diferentes tipos de função para este produto.

Foi também considerada uma alocação decrescente mas fixa do investimento entre ativos com e sem risco, de forma a manter a solução estudada simples do ponto de vista do cliente, já que a liberdade de escolher vários parâmetros pode ser melhor para clientes com um perfil mais ativo, mas pode ser menos apreciado por clientes que prefiram um produto simples e no qual algumas decisões são tomadas por uma terceira parte. Pode, no entanto, fazer-se esta análise, considerando cenários com diferentes alocações.

Por fim, pode considerar-se a obrigatoriedade de um consumo mínimo de subsistência, de forma a garantir que as necessidades mais básicas são salvaguardadas de eventuais choques nos retornos dos investimentos ou na longevidade projetada. E pode ainda incorporar-se a existência de um rendimento exógeno, como uma pensão vitalícia, de forma a verificar o impacto na escolha da estratégia ótima para cada perfil.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alonso-García, J., & Sherris, M. (2017). One size fits all ? Drawdown structures in Australia and The Netherlands. <https://doi.org/10.2139/ssrn.3025064>
- Andréasson, J. G., Shevchenko, P. V., & Novikov, A. (2017). Optimal consumption, investment and housing with means-tested public pension in retirement. *Insurance: Mathematics and Economics*, 75, 32–47.
- Auster, A., & Maddock, E. (2016). Expenditure patterns in retirement. Retrieved from <https://australiancentre.com.au/publication/expenditure-patterns-retirement/>
- Banerjee, S. (2014). How Does Household Expenditure Change With Age for Older Americans ? *EBRI Notes*, 35(9).
- Bayraktar, E., & Young, V. R. (2006). Minimizing the probability of lifetime ruin under borrowing constraints. *Insurance: Mathematics and Economics*, 41(1), 196–221.
- Bell, D., Liu, E., & Shao, A. (2017). Member's Default Utility Function for Default Fund Design Version 1 ("MDUF v1") (Vol. 1). Retrieved from [http://www.aist.asn.au/media/995162/mduf\\_working\\_paper.pdf](http://www.aist.asn.au/media/995162/mduf_working_paper.pdf)
- Bengen, W. P. (1994). Determining withdrawal rates using historical data. *Journal of Financial Planning*, October, 171–180.
- Bengen, W. P. (2001). Conserving Client Portfolios During Retirement, Part IV. *Journal of Financial Planning*, May, 14(5), 110-119.
- Blanchett, D., Kowara, M., & Chen, P. (2012). Optimal Withdrawal Strategy for Retirement-Income Portfolios. *Retirement Management Journal*, 2(3), 7–20.
- Blanchett, D. M. (2013). Simple Formulas to Implement Complex Withdrawal Strategies. *Journal of Financial Planning*, 26(9), 40–48.
- Blanchett, D. M. (2014). Exploring the Retirement Consumption Puzzle. *Journal of Financial Planning*, 27(5), 34–42.
- Boyer, M. M., & Stentoft, L. (2013). If we can simulate it, we can insure it: An application to longevity risk management. *Insurance: Mathematics and Economics*, 52(1), 35–45.
- Brancati, C. U., Beach, B., Franklin, B., & Jones, M. (2015). Understanding retirement journeys : Expectations vs reality. Retrieved from [http://www.ilcuk.org.uk/index.php/publications/publication\\_details/understanding\\_retirement\\_journeys\\_expectations\\_vs\\_reality](http://www.ilcuk.org.uk/index.php/publications/publication_details/understanding_retirement_journeys_expectations_vs_reality)
- Bravo, J. M. (2007). Tábuas de Mortalidade Contemporâneas e Prospectivas: Modelos Estocásticos, Aplicações Actuarias e Cobertura do Risco de Longevidade.

Dissertação de Doutoramento em Economia pela Universidade de Évora.  
Disponível em <http://www.rdpc.uevora.pt/handle/10174/11148?locale=pt>

- Bravo, J. M., Afonso, L. B., & Guerreiro, G. R. (2013). Avaliação Actuarial do Regime de Pensões da Caixa Geral de Aposentações: Formulação Actual e Impacto das Medidas Legislativas. Retrieved from [https://www.portugal.gov.pt/media/1279646/05\\_b\\_Relatório\\_Avaliação\\_Actuarial\\_CGA\\_Final.pdf](https://www.portugal.gov.pt/media/1279646/05_b_Relatório_Avaliação_Actuarial_CGA_Final.pdf)
- Bravo, J. M., & Holzmann, R. (2014). The Pay-out Phase of Funded Pensions Plans: Risks and Payment Options. Instituto BBVA de Pensiones, Working Paper N° 6/2014, Informe PISA sobre educación financiera OECD, June.
- Bravo, J. M., Afonso, L. & Guerreiro, G. (2014). Avaliação Actuarial do Sistema Previdencial da Segurança Social e Prestação Única da Segurança Social. Gabinete de Estratégia e Planeamento, Ministério da Solidariedade, Emprego e Segurança Social, Lisboa, Dezembro.
- Bravo, J.M. (2015a). Reforma Estrutural dos Sistemas de Pensões. in Viriato S. M., V., P. T. Pereira, V. S. (Coord.). Afirmar o Futuro: Políticas Públicas para Portugal, Volume I - Estado, Instituições e Políticas Sociais (pp. 264-329). Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- Bravo, J. M. (2015b). Living longer and prospering? Opções de redesenho dos sistemas de pensões em Portugal. In Neto, Paulo e Serrano, Maria Manuel (coords.) (2015). Políticas Públicas, Economia e Sociedade. Contributos para a Definição de Políticas no Período 2014-2020. Nexo Literário, Alcochete.
- Bravo, J. M. (2016). Sustentabilidade, Adequação e Equidade nos Sistemas de Protecção Social: O desafio da pirâmide etária invertida. In *Políticas Públicas e o Papel do Estado no Século XXI - Ciclo de Mesas Redondas "Ter Estado"* (2016th ed., pp. 295–327). Instituto da Defesa Nacional (IDN).
- Bravo, J. M. (2017). Contratos intergeracionais e consistência temporal na gestão da protecção social: Implicações Políticas e Reforma do Sistema de Pensões. in "Envelhecimento na Sociedade Portuguesa: Pensões, Família e Cuidados", ICS: Imprensa de Ciências Sociais, Universidade de Lisboa, pp. 61-96.
- Bravo, J. M., El Mekkaoui de Freitas, N. (2018). Valuation of Longevity Linked Life Annuities. *Insurance: Mathematics and Economics*, 78, 212-229.
- Brouhns, N., Denuit, M., & Vermunt, J. K. (2002). A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. *Insurance: Mathematics and Economics*, 31(31), 373–393.
- Cocco, J. F., Gomes, F. J., & Maenhout, P. J. (2005). Consumption and portfolio choice over the life cycle. *Review of Financial Studies* 18(2), 491-533.

- Denuit, M., Goderniaux, A.C., (2005). Closing and projecting life tables using log-linear models. *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, 29–48.
- Ding, J. (2013a). Modelling post-retirement finances in the presence of a bequest motive, housing and public pension. Macquarie University. Retrieved from [https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=2251552](https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2251552)
- Ding, J. (2013b). Essays on post-retirement financial planning and pension policy modelling in Australia. Macquarie University.
- Dybvig, P. H., & Liu, H. (2010). Lifetime consumption and investment: Retirement and constrained borrowing. *Journal of Economic Theory*, 145(3), 885–907.
- Foster, A. C. (2016). A closer look at spending patterns of older Americans. *U.S. Bureau of Labor Statistics*, 5(4), 1–8.
- Frank, L. R., Mitchell, J. B., & Blanchett, D. M. (2011). Probability-of-Failure-Based Decision Rules to Manage Sequence Risk in Retirement. *Journal of Financial Planning*, 24(11), 44–53.
- Frank, L. R., Mitchell, J. B., & Blanchett, D. M. (2012a). An Age-Based, Three Dimensional, Universal Distribution Model Incorporating Sequence Risk. *Journal of Financial Planning*, 25(3), 52–60.
- Frank, L. R., Mitchell, J. B., & Blanchett, D. M. (2012b). Transition through old age in a dynamic retirement distribution model. *Journal of Financial Planning*, 25(12), 42–50.
- GEP-MSESS (2015). Avaliação Actuarial do Sistema Previdencial da Segurança Social - Sistema Previdencial. GEP - Ministério da Solidariedade, Emprego e Segurança Social, Lisboa, Dezembro.
- Goodman, L. A. (1979). Simple Models for the Analysis of Association in Cross-Classifications having Ordered Categories. *Journal of the American Statistical Association*, 74(367), 537–552.
- Guyton, J. T. (2004). Decision Rules and Portfolio Management for Retirees: Is the “Safe” Initial Withdrawal Rate Too Safe? *Journal of Financial Planning*, 17(10), 54–62.
- Guyton, J. T., & Klinger, W. J. (2006). Decision Rules and Maximum Initial Withdrawal Rates. *Journal of Financial Planning*, 306(March), 50–58.
- Habib, F., Huang, H., & Milevsky, M. (2017). Approximate Solutions to Retirement Spending Problems and The Optimality of Ruin, 1–17.
- Holzmann, R. (2014). Addressing Longevity Risk through Private Annuities: Issues and Options. Paper prepared for the 22nd Annual Colloquium of Superannuation

Researchers, CEPAR and ABS' School of Risk and Actuarial Studies, New South Wales University, Sydney, July 7-8, 2014.

Jagannathan, R., & Kocherlakota, N. R. (1996). Why Should Older People Invest Less in Stocks Than Younger People? *Federal Reserve Bank of Minneapolis ...*, 20(3), 11–23.

Lee, R. D., & Carter, L. R. (1992). Modeling and Forecasting U. S. Mortality. *Journal of the American Statistical Association*, 87(419), 659–671.

Lin, Y., & Cox, S. H. (2005). Securitization of Mortality Risks in Life Annuities. *The Journal of Risk and Insurance*, 72(2), 227–252.

Lockwood, L. M. (2014). Incidental Bequests: Bequest Motives and the Choice to Self-Insure Late-Life Risks (National Bureau of Economic Research Working Paper No. 20745).

Milevsky, M. A., & Robinson, C. (2005). A Sustainable Spending Rate without Simulation. *Financial Analysts Journal*, 61(6), 89–100.

Milevsky, M. A., & Huang, H. (2011). Spending Retirement on Planet Vulcan : The Impact of Longevity Risk Aversion on Optimal Withdrawal Rates. *Financial Analysts Journal*, 67(2), 45–58.

OECD. (2017). Pension Markets in Focus, 2017 edition. *Pension Markets in Focus*. Retrieved from <http://www.oecd.org/finance/financial-markets/globalpensionstatistics.htm>

Paulin, G. D., & Duly, A. L. (2002). Planning ahead: consumer expenditure patterns in retirement. *Monthly Labor Review*, 125(7), 38–58.

Pfau, W. D. (2015). Making Sense Out of Variable Spending Strategies for Retirees, 1–18.

Poterba, J., Rauh, J., Venti, S., & Wise, D. (2006). Lifecycle Asset Allocation Strategies and the Distribution of 401(k) Retirement Wealth. *National Bureau of Economic Research Working Paper Series, No. 11974*. <https://doi.org/10.1007/s13398-014-0173-7.2>

Renshaw, A. E., & Haberman, S. (2003). Lee–Carter mortality forecasting with age-specific enhancement. *Insurance: Mathematics and Economics*, 33(2), 255–272. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0167-6687\(03\)00138-0](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0167-6687(03)00138-0)

Roy, K., & Carson, S. (2015). Spending in retirement. *Retirement Insights, J.P. Morgan Asset Management*, 1–8. Retrieved from [https://jpmorgansmartretirement.com/blobcontent/324/1006/1323430000871\\_RI\\_Spending\\_in\\_retirement.pdf](https://jpmorgansmartretirement.com/blobcontent/324/1006/1323430000871_RI_Spending_in_retirement.pdf)

- Stańko, D., & Paklina, N. (2014). Supervising the Distribution of Annuities and other Forms of Pension Pay-Out. *IOPS Working Papers on Effective Pension Supervision*, (21). Retrieved from [www.iopsweb.org/WP\\_21\\_Supervising-Distribution-Annuities-Pension Pay-out .pdf](http://www.iopsweb.org/WP_21_Supervising-Distribution-Annuities-Pension-Pay-out.pdf)
- Steiner, K. (2014). A Better Systematic Withdrawal Strategy-The Actuarial Approach. *Journal of Personal Finance*, 13(2), 51–56.
- Sun, W., & Webb, A. (2012). Can Retirees Base Wealth Withdrawals on the IRS' Required Minimum Distributions?, (October), 12–19.
- Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2), 177–188.
- Waring, M. B., & Siegel, L. B. (2015). The Only Spending Rule Article You Will Ever Need. *Financial Analysts Journal*, 71(1), 91–107.
- Young, V. R. (2004). Optimal Investment Strategy to Minimize the Probability of Lifetime Ruin. *North American Actuarial Journal*, 8(4), 106–126.
- Zolt, D. M. (2013). Achieving a Higher Safe Withdrawal Rate With the Target Percentage Adjustment. *Journal of Financial Planning*, (January), 51–59.



## ANEXO I

**Quadro 14 - Cenário base - Teste 2 - Estratégia 1**

Estratégia 1		Teste 2					
$\gamma$	$\phi$	Ct (%)	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média	Utilidade
8	0,83	2,73%	6 821	8 207	25 000	289 966	-1,256E-27
	0,50	2,73%	6 821	8 207	25 000	289 966	-1,256E-27
	0,15	2,73%	6 821	8 207	25 000	289 966	-1,256E-27
5	0,83	2,73%	6 821	8 207	25 000	289 966	-9,628E-16
	0,50	2,73%	6 821	8 207	25 000	289 966	-9,624E-16
	0,15	2,73%	6 821	8 207	25 000	289 966	-9,624E-16
2	0,83	2,73%	6 821	8 207	25 000	289 966	-1,881E-03
	0,50	2,73%	6 821	8 207	25 000	289 966	-1,841E-03
	0,15	2,73%	6 821	8 207	25 000	289 966	-1,839E-03

Fonte: Cálculos do autor

**Quadro 15 - Cenário base - Teste 2 - Estratégia 2**

Estratégia 2		Teste 2					
$\gamma$	$\phi$	Ct (%)	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média	Utilidade
8	0,83	6,01%	3 076	12 547	49 158	162 052	-9,182E-28
	0,50	6,01%	3 076	12 548	49 155	162 041	-9,181E-28
	0,15	6,01%	3 076	12 548	49 155	162 041	-9,181E-28
5	0,83	6,92%	2 957	13 391	40 611	135 503	-3,624E-16
	0,50	6,94%	2 954	13 407	40 450	135 000	-3,611E-16
	0,15	6,94%	2 954	13 407	40 450	135 000	-3,611E-16
2	0,83	8,60%	2 623	14 524	28 479	97 212	-1,217E-03
	0,50	9,18%	2 489	14 813	25 175	86 624	-1,135E-03
	0,15	9,20%	2 482	14 826	25 021	86 129	-1,131E-03

Fonte: Cálculos do autor

**Quadro 16 - Cenário base - Teste 2 - Estratégia 2.1**

Estratégia 2.1		Teste 2				
$\gamma$	$\phi$	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média	Utilidade
8	0,83	4 186	15 594	28 392	97 210	-1,078E-28
	0,50	4 166	15 673	27 723	95 074	-1,062E-28
	0,15	4 166	15 673	27 723	95 075	-1,062E-28
5	0,83	3 891	15 853	25 000	86 313	-1,414E-16
	0,50	3 888	15 851	25 000	86 312	-1,368E-16
	0,15	3 888	15 851	25 000	86 312	-1,368E-16
2	0,83	3 774	15 763	25 000	86 288	-1,088E-03
	0,50	3 737	15 735	25 000	86 280	-1,012E-03
	0,15	3 735	15 734	25 000	86 279	-1,009E-03

Fonte: Cálculos do autor

**Quadro 17 - Cenário base - Teste 2 - Estratégia 2.2**

Estratégia 2.2		Teste 2				
$\gamma$	$\phi$	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média	Utilidade
8	0,83	6 055	16 143	25 000	86 397	-5,174E-29
	0,50	6 026	16 140	25 000	86 398	-4,889E-29
	0,15	6 026	16 140	25 000	86 398	-4,889E-29
5	0,83	5 552	16 003	25 000	86 368	-1,169E-16
	0,50	5 497	15 997	25 000	86 370	-1,130E-16
	0,15	5 497	15 997	25 000	86 370	-1,130E-16
2	0,83	5 430	15 933	25 000	86 268	-1,073E-03
	0,50	5 174	15 876	25 000	86 254	-9,999E-04
	0,15	5 131	15 874	25 000	86 264	-9,968E-04

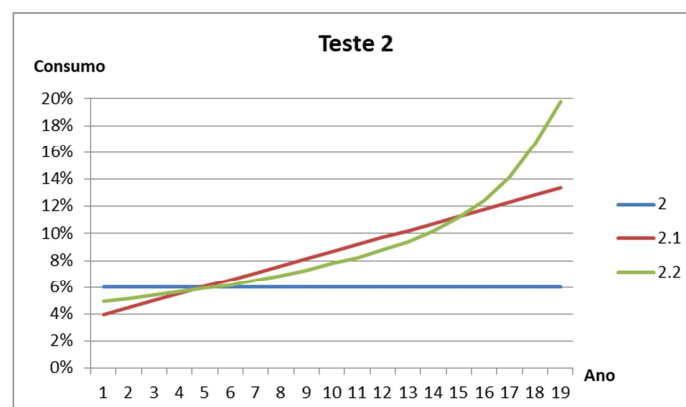
Fonte: Cálculos do autor

**Quadro 18 - Cenário base - Teste 2 - Estratégia 3**

Estratégia 3		Teste 2				
$\gamma$	$\phi$	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média	Utilidade
8	0,83	4 318	15 681	26 506	91 390	-8,048E-29
	0,50	4 318	15 681	26 506	91 390	-7,825E-29
	0,15	4 318	15 681	26 506	91 390	-7,825E-29
5	0,83	4 318	15 681	26 506	91 390	-1,274E-16
	0,50	4 318	15 681	26 506	91 390	-1,238E-16
	0,15	4 318	15 681	26 506	91 390	-1,238E-16
2	0,83	4 318	15 681	26 506	91 390	-1,086E-03
	0,50	4 318	15 681	26 506	91 390	-1,014E-03
	0,15	4 318	15 681	26 506	91 390	-1,011E-03

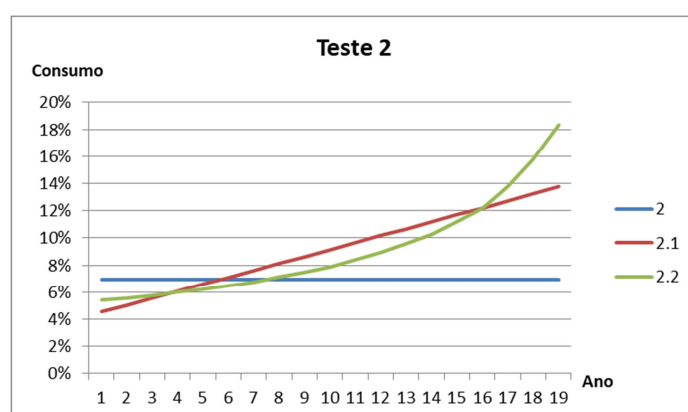
Fonte: Cálculos do autor

**Figura 10 - Cenário base - Teste 2 - Consumo ano a ano para  $\gamma = 8$**



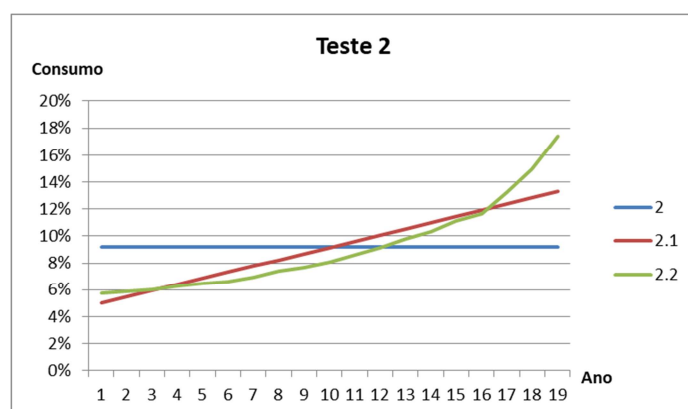
Fonte: Cálculos do autor

**Figura 11** - Cenário base - Teste 2 - Consumo ano a ano para  $\gamma = 5$



Fonte: Cálculos do autor

**Figura 12** - Cenário base - Teste 2 - Consumo ano a ano para  $\gamma = 2$



Fonte: Cálculos do autor

**Quadro 19** - Análise de sensibilidade - Teste 2 - Estratégia 1

Estratégia 1		Teste 2					
$\gamma$	$\phi$	Ct (%)	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média	Utilidade
8	0,83	2,73%	6 821	8 207	25 000	289 966	-1,187E-27
	0,50	2,73%	6 821	8 207	25 000	289 966	-1,187E-27
	0,15	2,73%	6 821	8 207	25 000	289 966	-1,187E-27
5	0,83	2,73%	6 821	8 207	25 000	289 966	-8,983E-16
	0,50	2,73%	6 821	8 207	25 000	289 966	-8,979E-16
	0,15	2,73%	6 821	8 207	25 000	289 966	-8,979E-16
2	0,83	2,73%	6 821	8 207	25 000	289 966	-1,726E-03
	0,50	2,73%	6 821	8 207	25 000	289 966	-1,691E-03
	0,15	2,73%	6 821	8 207	25 000	289 966	-1,689E-03

Fonte: Cálculos do autor

**Quadro 20 - Análise de sensibilidade - Teste 2 - Estratégia 2**

Estratégia 2		Teste 2					
$\gamma$	$\phi$	Ct (%)	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média	Utilidade
8	0,83	6,03%	3 074	12 575	48 880	161 191	-7,790E-28
	0,50	6,03%	3 074	12 576	48 876	161 180	-7,789E-28
	0,15	6,03%	3 074	12 576	48 876	161 180	-7,789E-28
5	0,83	6,99%	2 947	13 445	40 055	133 766	-3,138E-16
	0,50	7,01%	2 943	13 461	39 892	133 255	-3,127E-16
	0,15	7,01%	2 943	13 461	39 892	133 255	-3,127E-16
2	0,83	8,78%	2 581	14 621	27 386	93 719	-1,091E-03
	0,50	9,21%	2 481	14 828	25 000	86 062	-1,017E-03
	0,15	9,21%	2 481	14 828	25 000	86 062	-1,013E-03

Fonte: Cálculos do autor

**Quadro 21 - Análise de sensibilidade - Teste 2 - Estratégia 2.1**

Estratégia 2.1		Teste 2				
$\gamma$	$\phi$	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média	Utilidade
8	0,83	4 155	15 612	28 097	96 263	-9,531E-29
	0,50	4 135	15 692	27 423	94 111	-9,387E-29
	0,15	4 135	15 692	27 423	94 111	-9,387E-29
5	0,83	3 856	15 826	25 000	86 305	-1,268E-16
	0,50	3 853	15 825	25 000	86 305	-1,228E-16
	0,15	3 853	15 825	25 000	86 305	-1,228E-16
2	0,83	3 688	15 698	25 000	86 270	-9,890E-04
	0,50	3 650	15 669	25 000	86 262	-9,219E-04
	0,15	3 648	15 668	25 000	86 261	-9,191E-04

Fonte: Cálculos do autor

**Quadro 22 - Análise de sensibilidade - Teste 2 - Estratégia 2.2**

Estratégia 2.2		Teste 2				
$\gamma$	$\phi$	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média	Utilidade
8	0,83	5 989	16 122	25 000	86 391	-4,683E-29
	0,50	5 957	16 119	25 000	86 393	-4,445E-29
	0,15	5 956	16 119	25 000	86 393	-4,445E-29
5	0,83	5 444	15 969	25 000	86 359	-1,063E-16
	0,50	5 393	15 963	25 000	86 361	-1,029E-16
	0,15	5 391	15 963	25 000	86 360	-1,029E-16
2	0,83	5 185	15 847	25 000	86 245	-9,772E-04
	0,50	4 913	15 791	25 000	86 238	-9,128E-04
	0,15	4 896	15 789	25 000	86 233	-9,101E-04

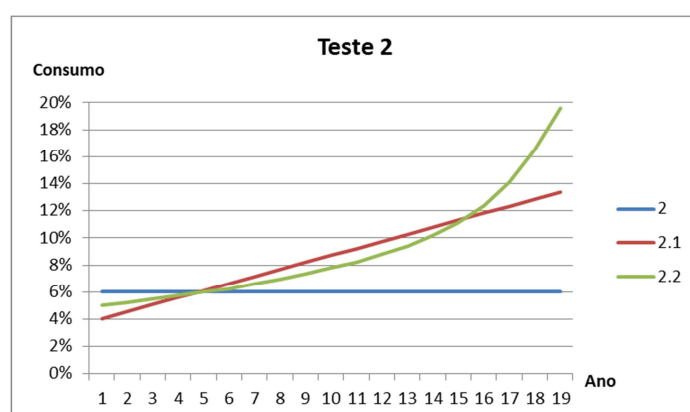
Fonte: Cálculos do autor

**Quadro 23** - Análise de sensibilidade - Teste 2 - Estratégia 3

Estratégia 3		Teste 2				
$\gamma$	$\phi$	Ct mín	Ct médio	Wt final mín	Wt final média	Utilidade
8	0,83	4 318	15 681	26 506	91 390	-7,000E-29
	0,50	4 318	15 681	26 506	91 390	-6,814E-29
	0,15	4 318	15 681	26 506	91 390	-6,814E-29
5	0,83	4 318	15 681	26 506	91 390	-1,147E-16
	0,50	4 318	15 681	26 506	91 390	-1,117E-16
	0,15	4 318	15 681	26 506	91 390	-1,117E-16
2	0,83	4 318	15 681	26 506	91 390	-9,891E-04
	0,50	4 318	15 681	26 506	91 390	-9,265E-04
	0,15	4 318	15 681	26 506	91 390	-9,238E-04

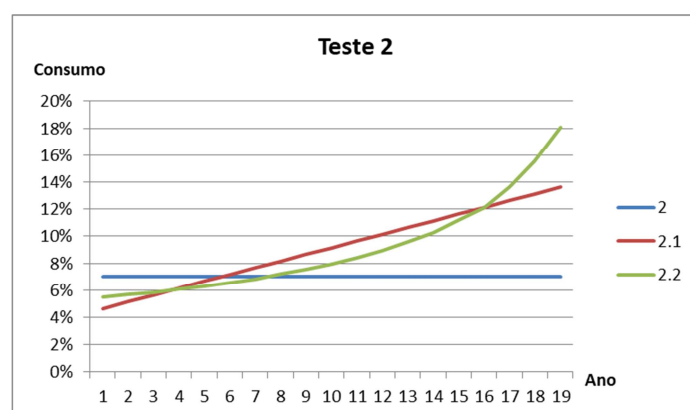
Fonte: Cálculos do autor

**Figura 13** - Análise de sensibilidade - Teste 2 - Consumo ano a ano para  $\gamma = 8$



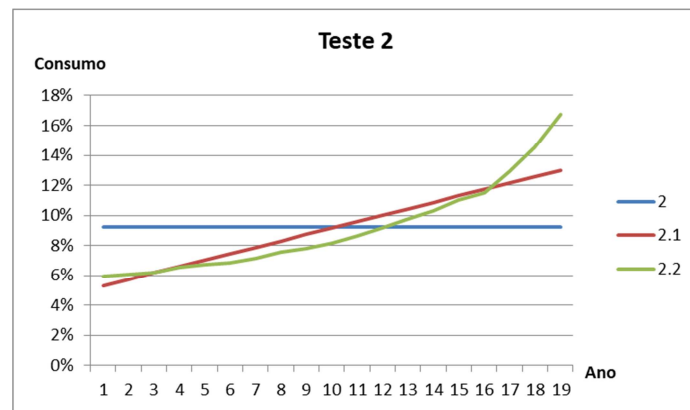
Fonte: Cálculos do autor

**Figura 14** - Análise de sensibilidade - Teste 2 - Consumo ano a ano para  $\gamma = 5$



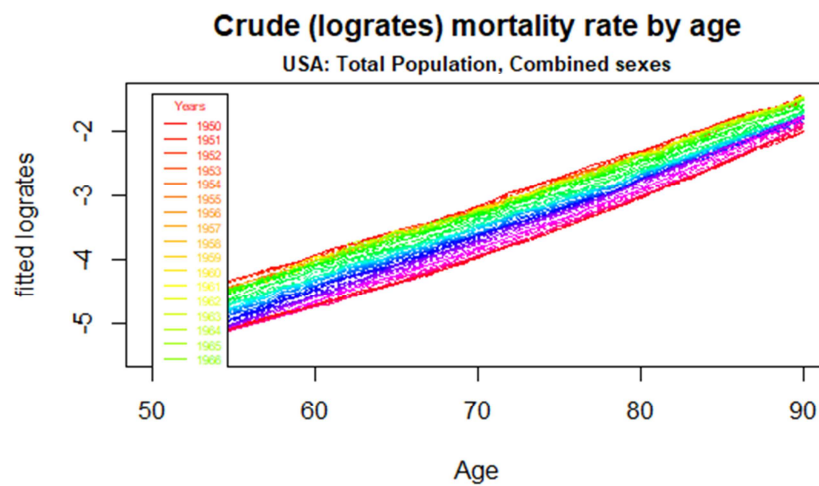
Fonte: Cálculos do autor

**Figura 15** - Análise de sensibilidade - Teste 2 - Consumo ano a ano para  $y = 2$



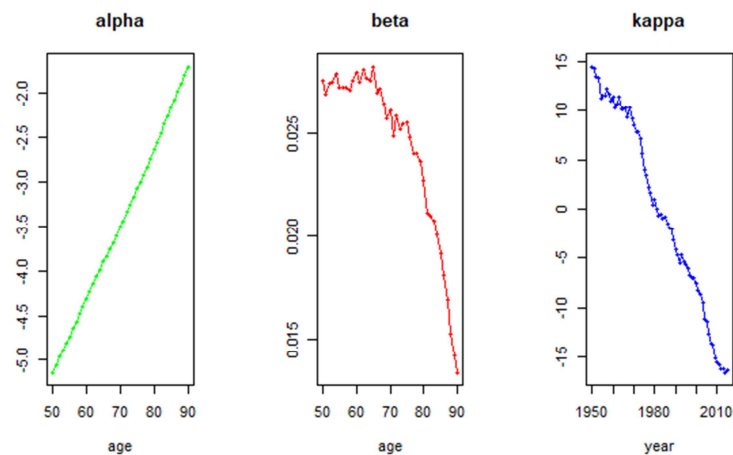
Fonte: Cálculos do autor

**Figura 16** - Taxa de Mortalidade Logarítmica por Idade



Fonte: Estimativas do autor

**Figura 17** - Parâmetros Estimados para a Distribuição Log bilinear Poisson Lee-Carter



Fonte: Estimativas do autor